

ÜBER DIE STRUKTUR GEWISSE FUNKTIONENKEGEL

Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
zur Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
SIEGFRIED GUBER
aus Nürnberg

München
Verlag: Mikrokopie GMBH, Weinstraße 4

1961

ÜBER DIE STRUKTUR GEWISSE FUNKTIONENKEGEL

Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Siegfried Guber
aus Nürnberg

München

Verlag: Mikrokopie GMBH, Weinstraße 4

1961



Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Mai 1961
Dekan: Universitätsprofessor Dr. G. Hesse
Berichterstatter: Privatdozent Dr. H. Bauer
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. G. Nübeling

I n h a l t

	Seite
Einleitung	4
Kapitel 0	
§ 1 Übersicht über die verwendeten Grundbegriffe und Bezeichnungen	9
§ 2 Konkave und konvexe reelle Funktionen	11
Kapitel I	
A	
Inf-Kegel	
§ 1 Definition und Beispiele	14
§ 2 Eigenschaften des inf-Kegels $\mathcal{K}$	16
§ 3 Stabilitätssätze	23
§ 4 Anwendung auf superharmonische Funktionen	26
§ 5 Eigenschaften der Kegel $\mathcal{K}^{\sim}$ und $\mathcal{K}_0$ und Stabilitätssätze	27
B	
Sup-Kegel	
§ 6 Definition und Beispiele	30
§ 7 Eigenschaften des sup-Kegels $\mathcal{K}$	31
§ 8 Stabilitätssätze	34
§ 9 Anwendung auf subharmonische Funktionen	36
§ 10 Eigenschaften des Kegels $\mathcal{K}^{\sim}$ und ein Stabilitätssatz	37
C	
Verbandskegel	
§ 11 Definition und Beispiele	38
§ 12 Eigenschaften des Verbandskegels $\mathcal{M}$	39
§ 13 Ein Stabilitätssatz	40

D

Vektorverbände

§ 14	Beispiele	41
§ 15	Eigenschaften des Vektorverbandes $\mathcal{L}_0$	42
§ 16	Stabilitätssätze	44

Kapitel II

A

§ 1	Maßtheoretische Charakterisierung konvexer inf- und sup-Kegel aus $\mathcal{L}(X)$	47
§ 2	Maßtheoretische Charakterisierung der (S)-Bedingung	48
§ 3	Maßtheoretische Charakterisierung der (T)-Bedingung	52

B

§ 4	Ein Kompaktifizierungssatz	55
§ 5	Beweis des Theorems 1 aus Kapitel I mit maßtheoretischen Hilfsmitteln	57
§ 6	Beweis des Theorems 2 aus Kapitel I mit maßtheoretischen Hilfsmitteln	59

Literatur		60
-----------	--	----

E i n l e i t u n g

Eine Menge $\mathcal{K}$ von reellen Funktionen auf einer Menge E nennen wir im folgenden einen konvexen inf - Kegel , wenn gilt

$$(1) \quad \begin{aligned} & \text{ist } f \in \mathcal{K}, \alpha \geq 0, \text{ so ist } \alpha f \in \mathcal{K}; \\ & \text{sind } f, g \in \mathcal{K}, \text{ so ist } f+g \in \mathcal{K}; \\ & \text{sind } f, g \in \mathcal{K}, \text{ so ist } \inf(f, g) \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Gilt statt der letzten Beziehung von (1), daß mit $f, g \in \mathcal{K}$ die Funktion $\sup(f, g)$ in $\mathcal{K}$ liegt, so nennen wir $\mathcal{K}$ einen konvexen sup - Kegel . Wir befassen uns in dieser Arbeit mit gewissen " Stabilitätseigenschaften " konvexer inf- beziehungsweise sup-Kegel.

Der Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen ist eine Arbeit von G. Choquet und J. Deny ([9]). Dort wird gezeigt, daß jeder bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe inf-Kegel $\mathcal{K}(X)$ auf einem Hausdorff-Raum X definierter stetiger, reeller Funktionen folgende Charakterisierung durch Integralmittelwerte gestattet: I und J seien zwei Indexmengen. Es existiert erstens eine Familie F_1 von Paaren (x_v, σ_v) ($v \in I$), wobei x_v ein Punkt aus X und σ_v ein von einer kompakten Teilmenge von X getragenes positives Radonsches Maß ist, das x_v nicht mit Masse belegt, und zweitens eine Familie F_2 von positiven, von kompakten Teilmengen von X getragenen Radonschen Mäßen τ_μ ($\mu \in J$) derart, daß die Funktionen aus $\mathcal{K}(X)$ die einzigen Funktionen $u \in \mathcal{L}(X)$, der Menge aller auf X stetigen, reellen Funktionen, sind mit:

$$(2) \quad \begin{aligned} \int u d\sigma_v &\leq u(x_v) \quad \text{für alle } v \in I, \\ \int u d\tau_\mu &\leq 0 \quad \text{für alle } \mu \in J. \end{aligned}$$

Der konvexe inf-Kegel $\mathcal{K}(X)$ heißt dann den Familien F_1 und F_2 i - assoziiert . Sind umgekehrt irgend zwei Familien F_1 und F_2 vom oben angegebenen Typus vorgegeben, so ist die ihnen i-assozierte Menge stetiger reeller Funktionen ein abgeschlossener, konvexer inf-Kegel.

Jeder bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe sup-Kegel $\mathcal{U}(X)$ stetiger, reeller, auf einem Hausdorff-Raum X erklärter Funktionen gestattet eine analoge Charakterisierung, nur daß dann genau für die Funktionen aus $\mathcal{U}(X)$ die zu (2) dualen Ungleichungen gelten. Wir sagen in diesem Fall, $\mathcal{U}(X)$ sei den Familien F_1 und F_2 s-assoziert.

Eine wichtige Rolle in der Integrationstheorie¹⁾ und auch bei gewissen Approximierbarkeitssätzen²⁾ spielt die sogenannte "Stonesche Bedingung". Sie nimmt auch bei unseren Betrachtungen eine Sonderstellung ein. Genügt nämlich $\mathcal{K}(X)$ der Stoneschen Bedingung, das heißt, gilt $\inf(1, u) \in \mathcal{K}(X)$ für alle $u \in \mathcal{K}(X)$ und enthält $\mathcal{K}(X)$ nur nicht-negative Funktionen, so gibt es, wie sich in Kapitel II, § 2 zeigen wird, zwei Familien F_1 und F_2 , denen $\mathcal{K}(X)$ i-assoziert ist und in denen nur Maße von einer Gesamtmasse ≤ 1 auftreten. Die Umkehrung dieser Aussage gilt auch. Auf Grund dieser Charakterisierung der Stoneschen Bedingung in dem abgeschlossenen, konvexen inf-Kegel $\mathcal{K}(X)$ läßt sich nun sofort folgendes Resultat gewinnen:

- (3) Ist $\mathcal{K}(X)$ ein bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossener, konvexer, der Stoneschen Bedingung genügender inf-Kegel nicht-negativer Funktionen aus $\mathcal{L}(X)$ und ist k eine auf den nicht-negativen reellen Zahlen $\mathbb{R}^+$ definierte stetige, reelle, konkave, wachsende, im Nullpunkt verschwindende Funktion, so ist $\mathcal{K}(X)$ bezüglich k stabil, das soll heißen, für alle $u \in \mathcal{K}(X)$ liegt auch die Funktion ku in $\mathcal{K}(X)$.

Beispielsweise enthält dann $\mathcal{K}(X)$ mit jeder Funktion f auch die Funktion $\sqrt{f}$.

Es liegt nun natürlich die Frage nahe, welcher Bedingung ein bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossener, konvexer sup-Kegel $\mathcal{U}(X)$ nicht-negativer, stetiger, reeller, auf einem Hausdorff-Raum X definierter Funktionen genügt, wenn alle Maße, die in den Familien auftreten, denen $\mathcal{U}(X)$ s-assoziert ist, Gesamtmassen ≤ 1 haben. In Kapitel II, § 3

1) H. Bauer: Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße, Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 448-482 (1956)

2) [15]

zeigen wir, daß unter diesen Voraussetzungen $\mathcal{U}(X)$ mit jeder Funktion u auch die Funktion $\sup(0, u-1)$ enthält. Wir sagen dann kurz, " $\mathcal{U}(X)$ genügt der (T)-Bedingung". Von dieser Aussage gilt auch die Umkehrung: Genügt der bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe sup-Kegel $\mathcal{U}(X)$ nicht-negativer Funktionen aus $\mathcal{L}(X)$ der (T)-Bedingung, so gibt es zwei Familien, denen $\mathcal{U}(X)$ s-assoziiert ist und in denen nur Maße mit Gesamtmassen ≤ 1 auftreten. Diese Information über $\mathcal{U}(X)$ liefert dann folgenden Stabilitätssatz:

- (4) Jeder bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe sup-Kegel nicht-negativer Funktionen aus $\mathcal{L}(X)$, der der (T)-Bedingung genügt, ist bezüglich jeder Operation $u \rightarrow t \circ u$ stabil, wobei $u \in \mathcal{U}(X)$ und t eine auf $\mathbb{R}^+$ reelle, konvexe, wachsende, im Nullpunkt verschwindende Funktion ist.

$\mathcal{U}(X)$ enthält dann also insbesondere mit jedem $u \in \mathcal{U}(X)$ auch die Funktion u^2 .

Den Aussagen (3) und (4) kann man entnehmen, daß die bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossenen, konvexen, der Stoneschen Bedingung genügenden inf-Kegel aus $\mathcal{L}(X)$ und die bezüglich derselben Topologie abgeschlossenen, konvexen, der (T)-Bedingung genügenden sup-Kegel aus $\mathcal{L}(X)$ einander dual gegenüberstehen. Trotzdem bedarf es verschiedener Methoden, um diese Aussagen zu beweisen.

Auf Grund der Untersuchungen von G. Nöbeling und H. Bauer in [15] ist zu vermuten, daß bei Stabilitätssätzen¹⁾ über Mengen reeller Funktionen, wie sie (3) und (4) darstellen, die Topologie des Definitionsbereiches der Funktionen keine wesentliche Rolle spielt. Das ist in der Tat so. In Kapitel I, dem wir noch ein Kapitel 0, in dem die für unsere Bedürfnisse wichtigen Begriffe sowie Eigenschaften konvexer und konkaver reeller Funktionen auf $\mathbb{R}^+$ aufgeführt werden, voranstellen, werden die beiden folgenden Theoreme, die mit zu den Hauptresultaten dieser Arbeit zählen, und die (3) und (4) noch verschärfen, auf elementarem Wege gewonnen:

1) Jedem "Stabilitätssatz" entspricht in leicht ersichtlicher Weise ein "Approximationssatz".

(3') Es sei E eine Menge und $\mathcal{K}(E)$ sei ein konvexer, bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossener $\inf$ -Kegel reeller, beschränkter, nicht-negativer Funktionen auf E . Weiter sei $\mathcal{T}$ die Menge aller auf $\mathbb{R}^+$ reellen, stetigen, konkaven, wachsenden, im Nullpunkt verschwindenden Funktionen und k^* sei irgendeine nicht-lineare Funktion aus $\mathcal{T}$. Dann gilt:

Aus der Stabilität von $\mathcal{K}(E)$ bezüglich der Operation $u \longrightarrow k^* \circ u$ ($u \in \mathcal{K}(E)$) folgt die Stabilität von $\mathcal{K}(E)$ bezüglich jeder Operation $u \longrightarrow k \circ u$ ($u \in \mathcal{K}(E)$, $k \in \mathcal{T}$).

Und analog ergibt sich für $\sup$ -Kegel mit (T)-Bedingung:

(4') Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller auf $\mathbb{R}^+$ reellen, konvexen, wachsenden, im Nullpunkt verschwindenden Funktionen und $\mathcal{U}(E)$ sei ein bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossener $\sup$ -Kegel beschränkter, reeller, nicht-negativer Funktionen auf einer Menge E . Genügt $\mathcal{U}(E)$ der (T)-Bedingung, so ist $\mathcal{U}(E)$ bezüglich jeder Operation $u \longrightarrow t \circ u$ ($u \in \mathcal{U}(E)$, $t \in \mathcal{T}$) stabil.

Man beachte, daß für die Aussage des Theorems 2 ((4')) die Konvexität des Kegels belanglos ist. Mit der in Kapitel II verfolgten Choquet-Denyschen Methode ist dieses Ergebnis natürlich nicht zu erhalten. Daß die Aussage über die $\sup$ -Kegel ((4')) schwächer ist als die Aussage über die $\inf$ -Kegel ((3')), liegt in der Natur der Sache.

Im Abschnitt B des Kapitels II gewinnen wir Theorem 1 in etwas abgeschwächter Form und Theorem 2 unter der Zusatzvoraussetzung, daß der betreffende Kegel konvex ist, auf topologisch-maßtheoretischem Wege, aufbauend auf die zu Beginn der Einleitung erwähnten Resultate, die sich im Teil A des Kapitels II finden. Aus den Theoremen 1 und 2 werden in Kapitel I noch einige Folgerungen, welche vor allem Verbandskegel und Vektorverbände betreffen, gezogen. Als Anwendung beweisen wir mit elementaren Methoden einen bekannten Satz aus der Theorie der superharmonischen Funktionen.

Diese Arbeit entstand auf Anregung des Herrn Privatdozenten Dr. H. Bauer (Hamburg). Herrn Dr. Bauer möchte ich an dieser Stelle ganz besonders dafür danken, daß er mir trotz der Entfernung Hamburg-München stets mit gutem Rat zur Seite stand. Vor allem verdanke ich ihm für die endgültige Fassung des zweiten Kapitels sehr wertvolle Hinweise.

Den Herren Professoren Dr. F. Löbell und Dr. O. Baier bin ich zu Dank verpflichtet, da sie mir trotz der Institutsarbeit Zeit zur Anfertigung der Arbeit gewährten.

Kapitel 0

§ 1

Übersicht über die verwendeten Grundbegriffe und Bezeichnungen

E sei eine Menge von Elementen $x, y, \dots$ und $\mathbb{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen, deren Elemente mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden, während $f, g, \dots$ immer Abbildungen von E in $\mathbb{R}$ bedeuten. Insbesondere bezeichnet i die identische Abbildung von $\mathbb{R}$ auf sich und i_+ deren Einschränkung auf $\mathbb{R}^+$, die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Für die konstante Abbildung einer Menge E auf die reelle Zahl α schreiben wir einfach α , da eine Verwechslung ausgeschlossen ist. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^+$ seien für unsere Betrachtungen stets mit der üblichen Topologie versehen. $[\alpha, \beta]$ schreiben wir für das abgeschlossene und $]\alpha, \beta[$ für das offene Intervall mit den Endpunkten α und β , während (α, β) den Punkt aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Koordinaten α und β bedeutet. Wie üblich verwenden wir für die Menge aller Abbildungen einer Menge A in eine Menge B die Bezeichnung B^A .

In der Menge $\mathbb{R}^E$, deren Teilmengen mit großen Frakturbuchstaben bezeichnet werden und deren Elemente reelle Funktionen heißen, erklären wir wie gewöhnlich die Addition zweier ihrer Elemente f, g durch die Beziehung

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad 1), \quad x \in E,$$

die Multiplikation eines Elementes f aus $\mathbb{R}^E$ mit einer reellen Zahl α durch die Beziehung

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad x \in E.$$

Dadurch wird $\mathbb{R}^E$ zu einem Vektorraum, in dem wie folgt noch eine Ordnung definiert sei: $f \leq g$ sei gleichbedeutend mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in E$ ²⁾. Diese Ordnung von $\mathbb{R}^E$ ist mit der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^E$ verträglich ³⁾. Wie üblich bezeichne $\sup(f, g)$ beziehungsweise $\inf(f, g)$ die obere beziehungsweise untere Einhüllende der Funktionen f, g .

1) Das Gleichheitszeichen mit dem Doppelpunkt davor heißt "definitions-gleich".

2) Da keine Verwechslung zu befürchten ist, verwenden wir für die Ordnung in $\mathbb{R}^E$ dasselbe Symbol wie für die lineare Ordnung in $\mathbb{R}$.

3) das heißt, $\mathbb{R}^E$ ist ein geordneter Vektorraum

Anstatt zu sagen, "mit f und g liegt auch $\inf(f,g)$ in $\mathbb{R}^E$ ", werden wir uns künftig des Ausdruckes " $\mathbb{R}^E$ ist bezüglich der Operation $(f,g) \rightarrow \inf(f,g)$ stabil" bedienen. Es ist dann klar, was die Stabilität einer Teilmenge aus $\mathbb{R}^E$ bezüglich irgendeiner in $\mathbb{R}^E$ erklärten Operation zu bedeuten hat.

Für die Hintereinanderschaltung zweier Abbildungen f und g schreiben wir $f \circ g$ und für die n -fache Hintereinanderschaltung einer Abbildung f einer Menge in sich abkürzend $f^{(n)}$. Ferner bedienen wir uns diesbezüglich folgender Sprechweise:

Definition 1: Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^E$. Gilt für alle $g \in \mathcal{M}$ und ein $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Beziehung $f \circ g \in \mathcal{M}$, so nennen wir die Menge $\mathcal{M}$ f -stabil. Ist allgemeiner $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und gilt für alle $g \in \mathcal{M}$ und alle $f \in \varphi$ die Beziehung $f \circ g \in \mathcal{M}$, so heißt $\mathcal{M}$ φ -stabil. Schließlich heißt $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in sich stabil, wenn für jedes Paar $f, h \in \mathcal{M}$ gilt $f \circ h \in \mathcal{M}$.¹⁾

Bemerkung: Enthält $\mathcal{M}$ nur nicht-negative Funktionen, dann braucht f nur auf $\mathbb{R}^+$ definiert zu sein.

Die Menge $\mathbb{R}^E$ kann auf mannigfache Weise topologisiert werden. Für unsere Zwecke kommen jedoch nur zwei Topologien von $\mathbb{R}^E$ in Frage:

- 1) Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz: Für $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^E$ ist die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathcal{M}}$ die Menge der durch Elemente aus $\mathcal{M}$ gleichmäßig approximierbaren Funktionen.
- 2) Ist $E = X$ ein topologischer Raum und $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^X$, so heißt $\mathbb{R}^X$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz²⁾ versehen, wenn $h \in \mathbb{R}^X$ genau dann zur abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$ gehört, wenn h auf jedem Kompaktum von X gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathcal{M}$ approximiert werden kann.³⁾

1) Offenbar ist $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in sich stabil.

2) [6], p.4 ff.

3) Da zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ ein $\gamma > 0$ derart existiert, daß $K \subset [-\gamma, \gamma]$ ist, genügt es, im Falle $X = \mathbb{R}$ nur Kompakta der Gestalt $[-\gamma, \gamma]$, $\gamma > 0$, im Falle $X = \mathbb{R}^+$ nur Kompakta der Gestalt $[0, \gamma]$, $\gamma > 0$, zu betrachten.

In Kapitel II benötigen wir einige Begriffe aus der Integrationstheorie. Dabei stützen wir uns auf [8], chap. III. Demzufolge bezeichnen wir für jeden topologischen Raum X mit $\mathcal{L}(X)$ die Menge aller auf X stetigen Funktionen. Man nennt dann σ ein positives Radonsches Maß auf einem kompakten Raum K , wenn σ eine positive Linearform auf $\mathcal{L}(K)$ ist, wobei wie üblich $\int f d\sigma = \sigma(f)$ gesetzt sei. (σ heißt positiv, wenn für jedes $f \geq 0$ gilt $\int f d\sigma > 0$.) Ein Beispiel für solch ein positives Radonsches Maß ist das sogenannte "Punktmaß" ¹⁾; Sei K kompakt und x ein Punkt aus K . Dann ist das Punktmaß ϵ_x definiert durch $\int f d\epsilon_x = f(x)$ ($f \in \mathcal{L}(K)$).

Ist X ein Hausdorff-Raum, so heiße σ ein von einer kompakten Menge getragenes positives Radonsches Maß auf X , wenn σ ein positives Radonsches Maß auf einer kompakten Teilmenge von X ist. Ein von einer kompakten Menge $K \subset X$ getragenes positives Radonsches Maß σ auf X definiert in natürlicher Weise eine Linearform auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(X, K)$ aller reellen Funktionen auf X , deren Restriktion auf das Kompaktum K , von dem σ getragen wird, stetig ist, wenn man die folgende Festsetzung trifft: Für ein Element $f \in \mathcal{L}(X, K)$ sei $\int f d\sigma := \int f_K d\sigma$, wenn f_K die Einschränkung von f auf K bedeutet.

§ 2

Konkave und konvexe reelle Funktionen

Für die Untersuchung gewisser Mengen aus $\mathbb{R}^E$ spielen konkave und konvexe Funktionen aus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ eine Rolle, weswegen wir deren markantesten Eigenschaften zusammenstellen wollen. Alle in diesem Paragraphen auftretenden Funktionen sind reell, ohne daß wir das jedesmal erwähnen.

Eine Teilmenge H eines Vektorraumes V über $\mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für jedes Paar $x, y \in H$ und jedes $0 < \gamma < 1$ gilt $\gamma x + (1-\gamma)y \in H$.

¹⁾ [8], chap. III, § 1.2

Definition 2: Eine auf einer konvexen Teilmenge H eines Vektorraumes V über $\mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt **konkav** auf H , wenn für jedes Paar $x, y \in H$ und jedes $0 < \gamma < 1$ $f(\gamma x + (1-\gamma)y) \geq \gamma f(x) + (1-\gamma)f(y)$ ist.
 f heißt **konvex** auf H , wenn $-f$ auf H konkav ist.
 f heißt auf H **affin - linear**, wenn f auf H sowohl konkav als auch konvex ist.

Es genügt also, künftige Definitionen und Sätze nur für konkave Funktionen auszusprechen.

Definition 3: Es seien H eine nicht-leere konvexe Teilmenge aus $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^H$ und $\gamma', \gamma'' \in H$ mit $\gamma' < \gamma''$. Dann ist $a[k; \gamma', \gamma'']$ die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\xi \longrightarrow (\gamma'' - \gamma')^{-1}[(k(\gamma'') - k(\gamma'))\xi + (\gamma'' k(\gamma') - \gamma' k(\gamma''))]$ und $a_H[k; \gamma', \gamma'']$ ihre Restriktion auf H .

Lemma 1: Jede auf einer nicht-leeren, offenen, konvexen Teilmenge H von $\mathbb{R}$ konkave Funktion k ist auf H stetig.

Den Beweis findet man in [7], chap. II, § 5.2.

Die auf $[0,1]$ erklärte Funktion $e^\sim$ mit $e^\sim(0) = 0$ und $e^\sim(\alpha) = 1$ für $0 < \alpha \leq 1$ lehrt, daß nicht jede auf einer nicht-leeren, abgeschlossenen, konvexen Teilmenge von $\mathbb{R}$ konkave Funktion dort stetig zu sein braucht.

Lemma 2: Sei H eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ und k sei eine auf H definierte konkave Funktion. Gibt es zwei verschiedene Punkte $\alpha, \beta \in H$ und ein γ mit $0 < \gamma < 1$ derart, daß $k(\gamma\alpha + (1-\gamma)\beta) = \gamma k(\alpha) + (1-\gamma)k(\beta)$ ist, so stimmen die Restriktionen von k und $a_H[k; \alpha, \beta]$ auf $[\alpha, \beta]$ überein.

Geometrisch besagt dieses Lemma, daß eine Abbildung k einer konvexen Menge $H \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ nur dann konkav ist, wenn der Graph von k , das ist die Menge $\{(\alpha, k(\alpha)), \alpha \in H\}$, mit jeder Geraden eine abgeschlossene Strecke¹⁾

1) Eine Strecke in einem Vektorraum heißt **abgeschlossen** (offen), wenn sie ihre Endpunkte enthält (nicht enthält).

oder höchstens zwei verschiedene Punkte gemein hat. In dieser Form steht Lemma 2 in [10], S. 111 (Satz 3).

Definition 4: Es sei k eine auf einem Intervall I konkave Funktion. Ein Punkt β aus dem offenen Kern von I heißt $\mathcal{E}$ -Stelle von k , wenn es ein β enthaltendes offenes Intervall I' aus I derart gibt, daß für je zwei Punkte β', β'' aus I' mit $\beta' < \beta < \beta''$ und für jedes $0 < \gamma < 1$ gilt

$$k(\gamma\beta' + (1-\gamma)\beta'') > \gamma k(\beta') + (1-\gamma) k(\beta'').$$

Ist k auf $\mathbb{R}$ konkav und β eine $\mathcal{E}$ -Stelle von k , so ist auf Grund von Lemma 2 klar, daß für je zwei Punkte β', β'' mit $\beta' < \beta < \beta''$ und jedes γ mit $0 < \gamma < 1$ gilt $k(\gamma\beta' + (1-\gamma)\beta'') > \gamma k(\beta') + (1-\gamma) k(\beta'')$.

Lemma 3: Ist k eine auf $K = [\alpha, \beta]$ stetige, konkave und nicht affin-lineare Funktion, so hat k in $] \alpha, \beta[$ mindestens eine $\mathcal{E}$ -Stelle.¹⁾

Beweis: Sei $\bar{\gamma} \in] \alpha, \beta[$. Ist $\bar{\gamma}$ $\mathcal{E}$ -Stelle von k , so sind wir fertig. Andernfalls gibt es auf K eine affin-lineare Funktion a , die in einer offenen Umgebung von $\bar{\gamma}$ mit k übereinstimmt. Wegen der Stetigkeit von a und k ist dann $A := (k-a)^{-1}(0)$ abgeschlossen, und da A eine offene Umgebung von $\bar{\gamma}$ enthält, enthält A mehr als zwei Punkte. Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei Punkte aus A mit $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, so gilt nach Lemma 2 für jedes $\xi \in [\xi_1, \xi_3]$ die Beziehung $k(\xi) = a(\xi)$. Daraus folgt, daß A ein abgeschlossenes Intervall ist, das wir $[\alpha', \beta']$ nennen wollen. Da $k|_K$ nicht affin-linear ist, gilt entweder $\alpha' \in] \alpha, \beta[$ oder $\beta' \in] \alpha, \beta[$. Im ersten Fall gilt dann für jedes Paar $\alpha'', \beta'' \in K$ mit $\alpha'' < \alpha' < \beta''$ die Ungleichung

$$k(\alpha') > a_K[k; \alpha'', \beta''](\alpha'),$$

so daß α' eine $\mathcal{E}$ -Stelle von k ist; der Fall $\beta' \in] \alpha, \beta[$ erledigt sich analog.

1) Geometrisch besagt das, daß jede unterhalb des Graphen einer konkaven, nicht affin-linearen Funktion gelegene Menge wenigstens einen Extrempunkt (die Definition findet man in [2]) hat.

Kapitel I

A

Inf-Kegel

§ 1

Definition und Beispiele

Eine nicht-leere Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^E$ heißt ein Kegel (mit der Spitze 0, die zum Kegel gehört¹⁾), wenn $\mathcal{K}$ bezüglich der Operation

$$a \longrightarrow \alpha a \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+, a \in \mathcal{K})$$

stabil ist. Von Bedeutung ist für uns die Tatsache, daß die Konvexität eines Kegels äquivalent ist mit der Stabilität bezüglich der Operation

$$(a,b) \longrightarrow a+b \quad (a,b \in \mathcal{K}) \quad 2).$$

Definition 1: Eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^E$ heißt ein inf - Kegel, wenn gilt

- (1) $\mathcal{K}$ ist ein Kegel,
- (2) $\mathcal{K}$ ist bezüglich der Operation $(f,g) \longrightarrow \inf(f,g)$ ($f,g \in \mathcal{K}$) stabil.

Definition 2: Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^E$ genügt der Stoneschen oder kurz der (S)-Bedingung, wenn $\mathcal{M}$ stabil ist bezüglich der Operation $f \longrightarrow \inf(1,f)$ ($f \in \mathcal{M}$).

Im folgenden kommt es uns auf eine Kennzeichnung der (S)-Bedingung in konvexen inf-Kegeln an, und dazu genügt im wesentlichen schon die Untersuchung eines speziellen inf-Kegels.

1) Alle von uns betrachteten Kegel haben, ohne daß wir das jedesmal erwähnen, die zum Kegel gehörende Spitze 0.

2) [7], chap. II, § 1.4, prop. 10

Beispiele konvexer inf-Kegel:

- 1) Die Menge $\mathcal{X}^+$ aller auf $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen $\xi \rightarrow \alpha \xi$ mit $\alpha \geq 0$. Es ist somit (vergleiche Kapitel 0, § 1) $\mathcal{X}^+ = \{\alpha i_+; \alpha \in \mathbb{R}^+\}$;
- 2) die Menge der auf $[0, \gamma]$, $\gamma > 0$, eingeschränkten Funktionen aus $\mathcal{X}^+$;
- 3) die Menge der auf einer konvexen Teilmenge eines Vektorraumes über $\mathbb{R}$ reellen, konkaven Funktionen;
- 4a) es seien I und J zwei Indexmengen, F_1 eine Familie von Paaren $(x_v, \sigma_v)_{v \in I}$, wobei x_v ein Punkt aus einem Hausdorff-Raum X und σ_v ein auf X positives, von einer kompakten Teilmenge von X getragenes Radonsches Maß ist, und F_2 sei eine Familie von auf X positiven, von kompakten Teilmengen von X getragenen Radonschen Mäßen τ_μ ($\mu \in J$); dann ist die Menge $\mathcal{K}(X; F_1, F_2)$ aller diejenigen auf X stetigen Funktionen u , für die gilt

$$(a) \int u d\sigma_v \leq u(x_v) \quad \text{für alle } v \in I \text{ und}$$

$$(b) \int u d\tau_\mu \leq 0 \quad \text{für alle } \mu \in J,$$

 ein konvexer inf-Kegel;
- 4b) die Menge der auf einem Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) reellwertigen¹⁾ superharmonischen Funktionen;
- 5) die Menge $\mathcal{T}$ der auf $\mathbb{R}^+$ stetigen²⁾, reellen, konkaven, wachsenden, im Nullpunkt verschwindenden Funktionen;
- 6) die Menge der Restriktionen von Funktionen aus $\mathcal{T}$ auf $[0, \gamma]$, $\gamma > 0$;
- 7) die Menge $\mathcal{T}_0$ der auf $\mathbb{R}^+$ reellen, konkaven, wachsenden, im Nullpunkt verschwindenden Funktionen;
- 8) die Menge $\mathcal{T}^-$ der auf $\mathbb{R}^+$ stetigen, reellen, nicht-negativen, konkaven, wachsenden Funktionen.

Setzt man in 3) den zugrundegelegten Vektorraum als topologisch voraus und läßt man dort nur stetige Funktionen zu, so stellt das von Choquet und Deny in [9] angegebene Beispiel 4a) eine Verallgemeinerung des Beispiels 3) dar; 4b) ist bei Verwendung stetiger reeller Funktionen ein Spezialfall von 4a). Wichtig für unsere Untersuchungen ist noch, daß die in 1), 4a), 4b), 5) und 8) erklärten Kegel bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossen sind. Die Mengen $\mathcal{X}^+$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}^-$ bezeichnen im folgenden stets die als Beispiele 1), 5), 7) und 8) angeführten Kegel.

-
- 1) Üblicherweise können superharmonische Funktionen auch $+\infty$ als Wert annehmen.
 - 2) Nach Kapitel 0, Lemma 1 würde es genügen, die Stetigkeit im Nullpunkt zu fordern.

§ 2

Eigenschaften des inf-Kegels $\mathcal{J}$

Satz 1: $\mathcal{J}$ ist in sich stabil.

Beweis: Die Hintereinanderschaltung zweier auf $\mathbb{R}^+$ stetiger, reeller, wachsender, im Nullpunkt verschwindender Funktionen liefert eine Funktion mit denselben Eigenschaften. Außerdem ist für $f, g \in \mathcal{J}$ die Funktion $f \circ g$ auf $\mathbb{R}^+$ konkav; denn für jedes Paar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ und jedes γ mit $0 < \gamma < 1$ gilt

$$f \circ g(\gamma\alpha + (1-\gamma)\beta) \geq f(\gamma g(\alpha) + (1-\gamma)g(\beta)) \geq \gamma f \circ g(\alpha) + (1-\gamma) f \circ g(\beta).$$

Erstere Ungleichung resultiert aus der Konkavität von g und der Monotonie von f , letztere Ungleichung aus der Konkavität von f .

Bemerkung: Der konvexe inf-Kegel der auf $\mathbb{R}$ fallenden, konkaven Funktionen ist nicht in sich stabil, da $f \circ g$ wachsend ist, wenn f und g fallende Funktionen sind.

Satz 2: Es sei $k \in \mathcal{J}$ und $\alpha' > 0$ sei eine $\mathcal{E}$ -Stelle von k . Dann gibt es zu jedem Paar reeller Zahlen α^-, β^- mit $0 < \alpha^- < \alpha'$, $\beta^- > 0$ eine Funktion k_1 aus dem von i_+ erzeugten k -stabilen Kegel ¹⁾ $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$ mit $k_1(\alpha^-) = \beta^-$, die α^- zur $\mathcal{E}$ -Stelle hat.

Beweis: Für jedes Paar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha_1 < \alpha^- < \alpha_2$ gilt $0 \leq k(\alpha_1) < k(\alpha^-) < k(\alpha_2)$, da sonst wegen der Monotonie von k die Restriktion von k auf die Halbgerade $f \geq \alpha^-$ konstant und damit α' keine $\mathcal{E}$ -Stelle von k wäre. Insbesondere ist $k(\alpha^-) > k(0) = 0$. Setzen wir $h := \frac{\alpha'}{k(\alpha^-)} k$, so gilt offenbar auch

$$0 \leq h(\alpha_1) < h(\alpha^-) = \alpha' < h(\alpha_2)$$

und wegen $\frac{\alpha'}{k(\alpha^-)} > 0$ liegt h in $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$. Da α' $\mathcal{E}$ -Stelle der konkaven Funktion k ist, besteht für jedes γ mit $0 < \gamma < 1$ die Beziehung

$$k \circ h(\gamma\alpha_1 + (1-\gamma)\alpha_2) \geq k(\gamma h(\alpha_1) + (1-\gamma)h(\alpha_2)) > \gamma k \circ h(\alpha_1) + (1-\gamma) k \circ h(\alpha_2).$$

¹⁾ Das ist der kleinste Kegel aus $\mathbb{R}^{+\mathbb{R}^+}$, der i_+ enthält und k -stabil ist.

Das aber bedeutet, daß α^- $\mathcal{L}$ -Stelle von koh und somit auch von der Funktion $k_1 := \frac{\beta^-}{\text{koh}(\alpha^-)} \text{koh}$ ist. Wegen $\text{koh}(\alpha^-) = k(\alpha') > k(\alpha^-) > 0$ gilt $\frac{\beta^-}{\text{koh}(\alpha^-)} > 0$ und da $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$ ein k -stabiler Kegel ist, liegt k_1 in $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$. Außerdem ist $k_1(\alpha^-) = \beta^-$, so daß also k_1 das Verlangte leistet.

Der als Beispiel 1 angeführte Kegel $\mathcal{L}^+$ hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Ist f ein von der Spitze von $\mathcal{L}^+$ verschiedenes Element von $\mathcal{L}^+$ (das heißt $f \neq 0$), so kann jedes andere Element $g \in \mathcal{L}^+$ dargestellt werden in der Form $g = \alpha f$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Da $\mathcal{L}^+$ bezüglich jeder Operation $f \longrightarrow \alpha f$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$, $f \in \mathcal{L}^+$) stabil ist, bedeutet das, daß der aus irgendeinem Element $f \neq 0$ von $\mathcal{L}^+$ erzeugte Kegel (das ist der kleinste f enthaltende Kegel) gerade $\mathcal{L}^+$ ist. Funktionenmengen, deren Elemente sich durch Operationen, bezüglich welcher sie stabil sind, aus den Elementen einer ihrer Teilmengen darstellen lassen, werden im folgenden von Wichtigkeit sein. Die nachfolgenden Lemmata sollen den Beweis einer derartigen Erzeugbarkeitseigenschaft des Kegels $\mathcal{K}$ (Satz 3) vorbereiten.

Lemma 1: Es sei $\gamma' < \gamma''$ und f sei eine auf $K = [\gamma', \gamma'']$ stetige, reelle Funktion. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\gamma' = \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \gamma''$ von K derart, daß für alle $\alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ ($v=1, \dots, n-1$) gilt

$$|f(\alpha) - a_K[f; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)| < \varepsilon.$$

Beweis: Da $f|_K$ gleichmäßig stetig ist, existiert eine Zerlegung $\gamma' = \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \gamma''$ von K mit $|f(\alpha') - f(\alpha'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes Paar α', α'' aus $[\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ ($v=1, \dots, n-1$), so daß für jedes $\alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ ($v=1, \dots, n-1$) gilt

$$\begin{aligned} |f(\alpha) - a_K[f; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)| &\leq |f(\alpha) - f(\gamma_v)| + |f(\gamma_v) - a_K[f; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)| \leq \\ &\leq |f(\alpha) - f(\gamma_v)| + |f(\gamma_v) - f(\gamma_{v+1})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Für eine auf $\mathbb{R}$ konkave Funktion ergeben sich speziell folgende Aussagen:

Lemma 2: (1) k sei eine auf $K = [\gamma', \gamma'']$, $\gamma' < \gamma''$, stetige, reelle, konkave Funktion und $\gamma' = \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \gamma''$ sei eine Zerlegung von K . Dann gilt $k \geq \inf(a_K[k; \gamma_1, \gamma_2], \dots, a_K[k; \gamma_{n-1}, \gamma_n])$.

- (2) Ist k auf $K' = [0, \gamma]$, $\gamma > 0$, reell, konkav, wachsend und nicht-negativ, so hat für jedes Paar $\alpha', \alpha'' \in K'$ mit $\alpha' < \alpha''$ die Funktion $a_K[k; \alpha', \alpha'']$ die Gestalt

$$a_K[k; \alpha', \alpha''] = \beta' i_+ + \beta'' \text{ mit } \beta', \beta'' \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis: (1) Wegen der Konkavität von k gilt für jedes $1 \leq v \leq n-1$ und jedes $0 < \gamma \sim < 1$

$$k(\gamma \sim \gamma_v + (1 - \gamma \sim) \gamma_{v+1}) \geq \gamma \sim k(\gamma_v) + (1 - \gamma \sim) k(\gamma_{v+1}) = a_K[k; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\gamma \sim \gamma_v + (1 - \gamma \sim) \gamma_{v+1}).$$

Hieraus und aus der Bemerkung von Seite 21 folgt die Behauptung.

- (2) Nach Kapitel 0, Definition 3 haben wir zu zeigen

$$(a) \quad k(\alpha'') \geq k(\alpha'), \quad (b) \quad \alpha'' k(\alpha') \geq \alpha' k(\alpha'').$$

(a) ist wegen der Monotonie von k richtig und die Gültigkeit von (b) ergibt sich für $\alpha' = 0$ aus $k(\alpha') \geq 0$ und $\alpha'' > \alpha' = 0$.

Für $\alpha' > 0$ ist $0 < \frac{\alpha'}{\alpha''} < 1$, woraus wegen der Konkavität von k und wegen $k(0) \geq 0$ folgt

$$k(\alpha') \geq (1 - \frac{\alpha'}{\alpha''}) k(0) + \frac{\alpha'}{\alpha''} k(\alpha'') \geq \frac{\alpha'}{\alpha''} k(\alpha'').$$

Dem Begriff der $\mathcal{E}$ -Stelle stellen wir noch gegenüber:

Definition 3: Sei $k \in \mathcal{F}$. Ein Punkt $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > 0$ heißt $\mathcal{L}^+$ -Stelle von k , wenn für alle Punkte α einer in $\mathbb{R}^+$ offenen Umgebung von β gilt $k(\alpha) = a_{\mathbb{R}}^+[k; 0, \beta](\alpha)$.

Wegen $a_{\mathbb{R}}^+[k; 0, \beta] = \frac{k(\beta)}{\beta} i_+$ ist β also $\mathcal{L}^+$ -Stelle von k , wenn es eine Funktion aus $\mathcal{L}^+$ gibt, die in einer offenen Umgebung von β mit k übereinstimmt.

Lemma 3: Es sei $k \in \mathcal{F}$, $\beta \geq \gamma > 0$ und γ sei eine $\mathcal{E}$ -Stelle von k . Dann ist

- (1) β keine $\mathcal{L}^+$ -Stelle von k ,
- (2) $k(\alpha) < a_{\mathbb{R}}^+[k; 0, \beta](\alpha)$ für alle $\alpha > \beta$.

Beweis: (1) Wir wollen annehmen, β sei eine $\mathcal{L}^+$ -Stelle von k . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $a \in \mathcal{L}^+$ derart, daß a und k in den Punkten β , $\beta + \alpha$ und, da alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ und damit auch alle Funktionen aus $\mathcal{L}^+$ im Nullpunkt verschwinden, im Nullpunkt übereinstimmen. Nach Kapitel 0, Lemma 2 stimmen dann aber a und k auf $[0, \beta + \varepsilon]$ überein, im Widerspruch dazu, daß der zwischen 0 und β gelegene Punkt γ $\mathcal{E}$ -Stelle von k sein sollte.

- (2) Aus der Konkavität von k zusammen mit $k(0) = 0$ folgt für jedes $\alpha > \beta$ die Beziehung

$$k(\beta) = k\left(\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)0 + \frac{\beta}{\alpha}\alpha\right) \geq \frac{\beta}{\alpha} k(\alpha), \text{ also}$$

$$k(\alpha) \leq \frac{k(\beta)}{\beta} i_+(\alpha) = a_R + [k; 0, \beta](\alpha).$$

Wäre $k(\alpha) = \frac{k(\beta)}{\beta} i_+(\alpha)$ für ein $\alpha > \beta$, so würde wegen den außer-
dem noch gültigen Beziehungen

$$k(0) = \frac{k(\beta)}{\beta} i_+(0) \quad \text{und} \quad k(\beta) = \frac{k(\beta)}{\beta} i_+(\beta)$$

aus Kapitel 0, Lemma 2 folgen, daß β eine $\mathcal{L}^+$ -Stelle von k ist,
was nach (1) nicht sein kann.

Lemma 4: Ist r eine Funktion aus $\mathbb{R}^+ \mathbb{R}^+$, so ist der von i_+ erzeugte r -stabile
Kegel $\mathcal{K}$ in sich stabil.

Beweis: Jede Funktion aus $\mathcal{K}$ ist entweder von der Gestalt

$$\alpha i_+ \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

oder aber von der Gestalt

$$\alpha_1 r \alpha_2 r \dots \alpha_n r \alpha_{n+1} i_+ \text{ mit } \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+.$$

Sind n und m ganze Zahlen ≥ 0 und gilt

$\alpha_v \in \mathbb{R}^+$, $\alpha'_v \in \mathbb{R}^+$ ($v=0, \dots, n$) und $\beta_\mu \in \mathbb{R}^+$, $\beta'_\mu \in \mathbb{R}^+$ ($\mu=0, \dots, m$),
so gelten die folgenden Beziehungen:

$$(\alpha_0 i_+) \circ (\beta_0 i_+) = \alpha_0 \beta_0 i_+,$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 i_+ \circ [(\alpha_1 r \alpha_1' i_+) \circ \dots \circ (\alpha_n r \alpha_n' i_+)] &= \alpha_0 \alpha_1 r \alpha_1' \alpha_2 r \dots \alpha_{n-1} r \alpha_n r \alpha_n' i_+ \text{ und} \\ [(\alpha_1 r \alpha_1' i_+) \circ \dots \circ (\alpha_n r \alpha_n' i_+)] \circ [(\beta_1 r \beta_1' i_+) \circ \dots \circ (\beta_m r \beta_m' i_+)] &= \\ = \alpha_1 r \alpha_1' \alpha_2 r \dots \alpha_{n-1} r \alpha_n r \alpha_n' \beta_1 r \beta_1' \beta_2 r \dots \beta_{m-1} r \beta_m r \beta_m' i_+. \end{aligned}$$

Daraus aber folgt nach der zu Beginn des Beweises gemachten Fest-
stellung, daß $\mathcal{K}$ in sich stabil ist.

Lemma 5: Es sei $k \in \mathcal{K}$ mit $k(\beta) = \beta$ für ein $\beta > 0$ und β sei keine $\mathcal{L}^+$ -Stelle
von k . Dann konvergiert die Folge $\{\inf(k^{(n)}, i_+)\}_{n=1,2,\dots}$ auf
jedem Kompaktum von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen $\inf(\beta, i_+)$.

Beweis: Wegen $a_R + [k; 0, \beta] = i_+$ folgt aus Lemma 3, (2) ¹⁾ für jedes $\alpha > \beta$

1) Zitate ohne Kapitelangabe beziehen sich auf das laufende Kapitel.

die Beziehung $\beta \leq k(\alpha) < i_+(\alpha) = \alpha$. Als Element von $\mathcal{T}$ ist k monoton wachsend, was für alle $\alpha > \beta$ die Beziehung

$$\beta = k(\beta) \leq k^{(2)}(\alpha) \leq k(\alpha) < \alpha$$

und allgemein für $n=2,3,\dots$ die Beziehung

$$\beta \leq k^{(n)}(\alpha) \leq k^{(n-1)}(\alpha)$$

nach sich zieht. Für jedes $\alpha > \beta$ ist also die Folge $\{k^{(n)}(\alpha)\}_{n=1,2,\dots}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent gegen eine reelle Zahl β' mit $\beta' \geq \beta$. Wäre $\beta' > \beta$, so wäre $k(\beta') < \beta'$, also β' nicht der Limes obiger Folge. Somit ist $\beta' = \beta$. Außerdem gilt wegen der Konkavität von k für alle $\alpha \in [0, \beta]$ die Beziehung $k(\alpha) \geq i_+(\alpha) = \alpha$. Wegen der Monotonie von k gilt dann für jedes $\alpha \in [0, \beta]$ und jedes $n=1,2,\dots$ die Beziehung $k^{(n)}(\alpha) \geq \alpha$. Somit konvergiert die Folge $\{\inf(k^{(n)}, i_+)\}_{n=1,2,\dots}$ auf $\mathbb{R}^+$ punktweise und, da die Grenzfunktion stetig ist, nach dem Satz von Dini ([6], p. 52) auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen $\inf(\beta, i_+)$.

Lemma 6: Es sei k eine nicht affin-lineare Funktion aus $\mathcal{T}$ und $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$ sei der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, k -stabile $\inf$ -Kegel. Dann enthält $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$ zu jedem $\beta \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $\inf(1, \beta i_+)$.

Beweis: Für $\beta = 0$ ist das trivial. Sei ein beliebiges $\beta > 0$ vorgegeben. Da k auf $\mathbb{R}^+$ nicht affin-linear ist, existiert ein $\gamma > 0$ derart, daß k sogar schon auf $[0, \gamma]$ nicht affin-linear ist. Nach Kapitel 0, Lemma 3 existiert dann ein Punkt $\gamma' \in]0, \gamma[$, der $\mathcal{L}$ -Stelle von k ist. Ist $\beta^{-1} \geq \gamma'$, so ist β^{-1} gemäß Lemma 3, (1) keine $\mathcal{L}^+$ -Stelle von k . Da außerdem $k(\beta^{-1}) > 0$ ist (wäre $k(\beta^{-1}) = 0$, so wäre $k = 0$, also k affin-linear), ist β^{-1} auch keine $\mathcal{L}^+$ -Stelle von $m := \frac{\beta - 1}{k(\beta^{-1})} k$ und offenbar gelten die Beziehungen $m(\beta^{-1}) = \beta^{-1}$ und $m \in \mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$. m liegt sogar in dem von i_+ erzeugten k -stabilen Kegel. Ist $\beta^{-1} < \gamma'$, so gibt es nach Satz 2 eine Funktion m aus dem von i_+ erzeugten k -stabilen Kegel mit $m(\beta^{-1}) = \beta^{-1}$, die β^{-1} zur $\mathcal{L}$ -Stelle hat, so daß β^{-1} nach Lemma 3, (1) keine $\mathcal{L}^+$ -Stelle von m ist. Nach Lemma 4 liegt für jedes $n=1,2,\dots$ die Funktion $m^{(n)}$ in dem von i_+ erzeugten k -stabilen Kegel, also erst recht in $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$.

Nach Lemma 5 konvergiert dann die Folge $\{\beta(\inf(m^{(n)}, i_+))\}_{n=1,2,\dots'}$ deren jedes Glied in $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$ liegt, auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen $\beta \inf(\beta^{-1}, i_+) = \inf(1, \beta i_+)$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz liegt also $\inf(1, \beta i_+)$ in $\mathcal{K}_k(\mathbb{R}^+)$.

Bemerkung: Wir verwenden später an einigen Stellen folgenden Schluß: Ist k auf $\mathbb{R}$ konkav und $\gamma' < \gamma''$, so gilt für alle $\alpha \in [\gamma', \gamma'']$ die Beziehung $k(\alpha) \leq a(\alpha)$, wenn $a := a[k; \gamma', \gamma'']$ ist. Wäre nämlich $k(\beta) > a(\beta)$ für ein $\beta < \gamma'$, so ergäbe sich (wir setzen $\frac{\gamma'' - \gamma'}{\gamma'' - \beta} = \gamma^-$) $k(\gamma') = k(\gamma^- \beta + (1 - \gamma^-) \gamma'') > \gamma^- a(\beta) + (1 - \gamma^-) a(\gamma'') = a(\gamma') = k(\gamma')$, was falsch ist. Für ein $\beta > \gamma''$ schließt man analog.

Lemma 7: $\mathcal{J}$ ist der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, der (S)-Bedingung genügende, konvexe inf-Kegel.

Beweis: Sei $\mathcal{K}$ der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, der (S)-Bedingung genügende, konvexe inf-Kegel. Daß $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ ist, folgt aus Satz 1. Zeigen wir also die dazu duale Relation. Seien ein $\gamma > 0$, ein $k \in \mathcal{J}$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. k ist auf $K := [0, \gamma]$ stetig. Folglich existiert nach Lemma 1 eine Zerlegung $0 = \gamma_1 < \dots < \gamma_{n+1} = \gamma$ von K derart, daß für jedes v mit $0 \leq v \leq n$ gilt

$$|k(\alpha) - a_K[k; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)| < \epsilon \quad \text{für jedes } \alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}].$$

Abkürzend setzen wir $a_v := a_K[k; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$. Da k auf K konkav ist, gilt nach Lemma 2, (1) für jedes $\alpha \in K$ die Beziehung

$$k(\alpha) \geq \inf(a_1, \dots, a_n)(\alpha)$$

und wegen der Konkavität von k gilt für jedes $v=1, \dots, n$ außerdem

$$a_v(\alpha) \geq k(\alpha) \quad \text{für jedes } \alpha \in [\gamma_1, \gamma_v] \cup [\gamma_{v+1}, \gamma_{n+1}].$$

Dann aber gilt für jedes $\alpha \in K$ die Beziehung

$$k(\alpha) - \inf(a_1, \dots, a_n)(\alpha) < \epsilon.$$

Nach Lemma 2, (2) ist jedes a_v ($v=1, \dots, n$) von der Gestalt

$a_v = \beta_v' i_+ + \beta_v''$ mit $\beta_v', \beta_v'' \in \mathbb{R}^+$ ($v=1, \dots, n$) und wegen $k(0) = 0$ ist speziell $a_1 = \beta_1' i_+$, das heißt, a_1 liegt in $\mathcal{K}$.

Da $\mathcal{K}$ ein der (S)-Bedingung genügender Kegel ist, liegt (ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist $\beta_v'' > 0$) die Funktion $\beta_v'' \inf(1, \frac{a_1}{\beta_v''}) = \inf(\beta_v'', a_1)$ ($v=1, \dots, n$) in $\mathcal{K}$, so daß wegen der Konvexität von $\mathcal{K}$ auch $a_v' = \beta_v' i_+ + \inf(\beta_v'', a_1)$ ($v=1, \dots, n$) in $\mathcal{K}$ liegt. (Das ist die einzige Stelle, an der die Konvexität von $\mathcal{K}$ ausgenutzt wird.) $\beta_1' i_+(\alpha) \geq \beta_v''$ hat zur Folge, daß $a_v'(\alpha) = \beta_v' i_+(\alpha) + \beta_v''$ ist und aus $\beta_1' i_+(\alpha) < \beta_v''$ folgt $a_v'(\alpha) = (\beta_1' + \beta_v') i_+(\alpha) \geq a_1(\alpha)$, so daß für jedes $v=2, \dots, n$ gilt $\inf(a_1, a_v') = \inf(a_1, a_v)$. Somit ist $\inf(\inf(a_1, a_2'), \dots, \inf(a_1, a_n')) = \inf(a_1, a_2', \dots, a_n') = \inf(a_1, a_2, \dots, a_n)$, und da $\mathcal{K}$ ein inf-Kegel ist, gilt $\inf(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{K}$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz liegt dann auch k in $\mathcal{K}$. Da k eine beliebige Funktion aus $\mathcal{T}$ war, gilt also $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$.

Der nächste Satz macht eine noch weitergehende Erzeugbarkeitsaussage über $\mathcal{T}$:

Satz 3: Ist k eine nicht affin-lineare Funktion aus $\mathcal{T}$, so ist $\mathcal{T}$ der von i_+ erzeugte, k -stabile, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe inf-Kegel.

Beweis: Sei $\mathcal{K}$ der von i_+ erzeugte, k -stabile, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe inf-Kegel. $\mathcal{K}$ enthält also insbesondere den von i_+ erzeugten, k -stabilen, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossenen inf-Kegel $\mathcal{K}'$. $\mathcal{K}'$ enthält nach Lemma 6 jede Funktion der Gestalt $\inf(1, \beta i_+)$ mit $\beta \geq 0$. Daraus aber folgt, daß $\mathcal{K}'$ den von i_+ erzeugten, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossenen, der (S)-Bedingung genügenden inf-Kegel enthält; denn dieser Kegel enthält neben $\mathcal{L}^+$ nur noch die Funktionen $\inf(\alpha, \beta i_+)$ mit $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, was unmittelbar aus der Beziehung

$$\inf(\inf(\alpha, \beta i_+), \inf(\alpha', \beta' i_+)) = \inf(\inf(\alpha, \alpha'), \inf(\beta, \beta') i_+)$$

$(\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}^+)$ folgt. Wegen der Konvexität von $\mathcal{K}$ enthält $\mathcal{K}$ dann auch den von i_+ erzeugten, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossenen, der (S)-Bedingung genügenden, konvexen inf-Kegel, der nach Lemma 7 gerade der Kegel $\mathcal{T}$ ist. Die Beziehung $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ folgt aus Satz 1, so daß also $\mathcal{K} = \mathcal{T}$ ist.

Stabilitätssätze

Wir wollen jetzt die Ergebnisse des vorangegangenen Paragraphen, in dem nur Kegel von auf $\mathbb{R}$ definierten reellen Funktionen behandelt wurden, auf Kegel von reellen Funktionen, die auf einer beliebigen Menge E definiert sind, anwenden. Es sei in diesem Paragraphen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird, $\mathbb{R}^E$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz versehen.

Satz 4: Ist $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener, die konstanten Funktionen enthaltender, konvexer inf-Kegel beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^E$, so ist $\mathcal{K}$ bezüglich jeder auf $\mathbb{R}$ reellen, konkaven, wachsenden Funktion stabil.

Beweis: Es seien ein Element $f \in \mathcal{K}$, eine auf $\mathbb{R}$ reelle, konkave, wachsende Funktion k und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu zeigen ist, es existiert ein $g \in \mathcal{K}$ mit $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in E$. Nach Voraussetzung existieren zwei reelle Zahlen γ', γ'' mit $\gamma' \leq f(x) \leq \gamma''$ für alle $x \in E$. Nach Kapitel 0, Lemma 1 ist k auf $\mathbb{R}$, also insbesondere auf $K := [\gamma', \gamma'']$ stetig. Daher existiert nach Lemma 1 eine Zerlegung $\gamma' = \gamma_1 < \dots < \gamma_{n+1} = \gamma''$ von K mit

$$|k(\alpha) - a_K[k; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}] \quad (v=1, \dots, n).$$

Wir setzen $a_v := a_K[k; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$. Wegen der Konkavität von k gilt dann für jedes $\alpha \in K$ die Beziehung - man schließt wie beim Beweis von Lemma

$$7 - \quad 0 \leq k(\alpha) - \inf(a_1, \dots, a_n)(\alpha) < \varepsilon.$$

Für alle $x \in E$ gilt dann

$$0 \leq k \circ f(x) - \inf(a_1, \dots, a_n) \circ f(x) < \varepsilon.$$

Da k auf K monoton ist, ist $a_v = \beta_v' i_+ + \beta_v''$ mit $\beta_v' \in \mathbb{R}^+$ für alle $v=1, \dots, n$. Also ist

$$\inf(a_1, \dots, a_n) \circ f = \inf(\beta_1' f + \beta_1'', \dots, \beta_n' f + \beta_n'')$$

und es liegt $g := \inf(a_1, \dots, a_n) \circ f$ in $\mathcal{K}$, da für jedes $v=1, \dots, n$ $\beta_v' \in \mathbb{R}^+$ und da $\mathcal{K}$ ein die Konstanten enthaltender, konvexer inf-Kegel ist.

Theorem 1: Jeder abgeschlossene, konvexe inf-Kegel $\mathcal{K}$ reeller, beschränkter, nicht-negativer Funktionen auf E , der bezüglich einer nicht affin-linearen Funktion k aus $\mathcal{T}$ stabil ist, ist bezüglich jeder Funktion aus $\mathcal{T}$ stabil.

Beweis: Es seien ein $f \in \mathcal{K}$, ein $h \in \mathcal{T}$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir haben nachzuweisen, daß es ein $g \in \mathcal{K}$ gibt mit $|h \circ f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in E$. Voraussetzungsgemäß existiert ein $\gamma > 0$ derart, daß für alle $x \in E$ gilt $0 \leq f(x) \leq \gamma$.

Da k auf $\mathbb{R}^+$ nicht affin-linear ist, gibt es ein $\gamma' > 1$ derart, daß k auch schon auf $[0, \gamma']$ nicht affin-linear ist. Dann gibt es nach Kapitel 0, Lemma 3, nach Satz 2 und nach Lemma 3 eine Funktion k' von der Gestalt $\alpha_1 k \circ \dots \circ \alpha_n k \circ \alpha_0 \mathbf{1}_+$ ($\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$), mit $k'(1) = 1$, die 1 nicht zur $\mathcal{L}^+$ -Stelle hat, so daß nach Lemma 5 die Folge $\{\inf(k'^{(n)}, \mathbf{1}_+)\}_{n=1,2,\dots}$ auf $K := [0, \gamma]$ gleichmäßig gegen $\inf(1, \mathbf{1}_+)$ konvergiert. Deshalb konvergiert die Folge $\{\inf(k'^{(n)} \circ f, f)\}_{n=1,2,\dots}$ auf E gleichmäßig gegen $\inf(1, f)$. Da $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener, k -stabiler inf-Kegel ist, liegt also $\inf(1, f)$ in $\mathcal{K}$ und da f eine beliebige Funktion aus $\mathcal{K}$ war, heißt das, daß $\mathcal{K}$ der (S)-Bedingung genügt.

Zu dem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ und dem vorgegebenen $h \in \mathcal{T}$ existiert - man schließt genauso wie beim Beweis von Lemma 7 - eine Funktion der Gestalt

$$g' := \inf(\beta_1' \mathbf{1}_+, \beta_2' \mathbf{1}_+ + \inf(\beta_1' \mathbf{1}_+, \beta_2''), \dots, \beta_n' \mathbf{1}_+ + \inf(\beta_1' \mathbf{1}_+, \beta_n'')) \mathbf{1}_+,$$

mit $\beta_1', \beta_v', \beta_v'' \in \mathbb{R}^+$ ($v=2, \dots, n$), für die gilt

$$|h(\alpha) - g'(\alpha)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \alpha \in K.$$

Damit ist $|h \circ f(x) - g' \circ f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in E$ und

$g := g' \circ f = \inf(\beta_1' f, \beta_2' f + \inf(\beta_1' f, \beta_2''), \dots, \beta_n' f + \inf(\beta_1' f, \beta_n''))$ liegt in $\mathcal{K}$, da $\mathcal{K}$ ein der (S)-Bedingung genügender, konvexer inf-Kegel ist.

Korollar: Ist $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener, konvexer inf-Kegel beschränkter Funktionen auf $\mathbb{R}^{+E}$, der mit jeder Funktion f auch die Funktion f^{α_0} für ein α_0 mit $0 < \alpha_0 < 1$ enthält, so enthält $\mathcal{K}$ mit jeder Funktion f auch die Funktionen f^α ($0 < \alpha \leq 1$), $\log(1+f)$, $\inf(1, f)$, $\frac{f}{1+f}$.

Beweis: Die Funktion $i_+^{\alpha_0}$ mit $0 < \alpha_0 < 1$ ist eine nicht affin-lineare Funktion aus $\mathcal{F}$ und die Funktionen i_+^α ($0 < \alpha \leq 1$), $\log(1+i_+)$, $\inf(1, i_+)$ und $\frac{i_+}{1+i_+}$ liegen ebenfalls in $\mathcal{F}$.

Zum Abschluß dieses Paragraphen sei noch darauf hingewiesen, daß wir das Lemma 2 ersetzen könnten durch die bekannte Aussage¹⁾: Jeder konvexe Körper²⁾ eines topologischen Vektorraumes über $\mathbb{R}$ ist Durchschnitt der ihn enthaltenden abgeschlossenen Halbräume. Daraus, oder eben aus Lemma 2, folgt nämlich, daß der kleinste, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene inf-Kegel aus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, der die auf $\mathbb{R}$ affin-linearen Funktionen enthält, die Menge der auf $\mathbb{R}$ konkaven Funktionen ist³⁾; denn für jede auf $\mathbb{R}$ nicht-konstante konkave Funktion k und für jedes kompakte Intervall $[\gamma', \gamma'']$, $\gamma' < \gamma''$, stellt die Menge

$$C(k; \gamma', \gamma'') := \{(\alpha, \beta); \alpha \in [\gamma', \gamma''], \min(k(\gamma'), k(\gamma'')) \leq \beta \leq k(\alpha)\}$$

einen konvexen Körper dar.

Von diesem Resultat ausgehend, wären wir ebenfalls zu unseren Stabilitätsätzen gelangt. Wir haben es jedoch vorgezogen, allen vier Teilen dieses Kapitels einen einheitlichen Beweisgedanken zugrunde zu legen.

1) [7], pg. 72 oder [12], § 17.5 S. 197

2) Jede abgeschlossene, konvexe Menge eines topologischen Vektorraumes über $\mathbb{R}$, die mindestens einen inneren Punkt enthält, heißt ein konvexer Körper.

3) Einer mündlichen Mitteilung zufolge hat Herr Dr. H. Bauer in einer demnächst erscheinenden Arbeit einen allgemeineren Satz bewiesen.

§ 4

Anwendung auf superharmonische Funktionen

Wir wollen nun einen unserer Stabilitätssätze, nämlich den Satz 4, auf reelle¹⁾ superharmonische Funktionen anwenden. Bekanntlich ([16], S. 1) heißt eine auf einem Gebiet G des $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) definierte reelle, nach unten halbstetige Funktion u auf G superharmonisch, wenn gilt: Ist G' ein samt seinem Rand R' in G enthaltenes Gebiet und w eine auf G' harmonische Funktion, die auf $G' \setminus R'$ stetig und auf $R' \leq u$ ist, so ist w auch auf $G' \leq u$.

Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar, daß die Menge $\mathcal{H}$ aller auf einem Gebiet G des $\mathbb{R}^n$ reellen, superharmonischen Funktionen ein bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossener, die konstanten Funktionen enthaltender, konvexer inf-Kegel ist (vergleiche auch [16], 3.4). Auf Grund dieser Feststellung können wir mit Hilfe von Satz 4 folgendes Resultat gewinnen (vergleiche [16], 3.13):

Ist h irgendeine auf einem Gebiet G des $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) reelle, superharmonische Funktion und k irgendeine auf $\mathbb{R}$ reelle, konkave, wachsende Funktion, so ist auch $ko h$ auf G superharmonisch.

Der Beweis hierfür ergibt sich wie folgt: Die Menge $\mathcal{H}^{\sim} := \{ \inf(\gamma, h); \gamma \in \mathbb{R}, h \in \mathcal{H} \}$ liegt in $\mathcal{H}$ und jede Funktion aus $\mathcal{H}^{\sim}$ ist nach dem Korollar zu Theorem 3 aus [4], chap. IV, § 6.2 auf jedem Kompaktum K von G beschränkt. Die Menge $\mathcal{H}^{\sim}(K)$ der Restriktionen von Funktionen aus $\mathcal{H}^{\sim}$ auf K ist folglich ein die Konstanten enthaltender, konvexer inf-Kegel beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^K$. Nach Satz 4 kann daher $ko \inf(\gamma, h)$ ($\gamma \in \mathbb{R}, h \in \mathcal{H}$) auf K gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathcal{H}^{\sim}(K)$ approximiert werden. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz ist daher $ko \inf(\gamma, h)$ ($\gamma \in \mathbb{R}, h \in \mathcal{H}$) auf G superharmonisch. Dann aber ist auch $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} ko \inf(\gamma, h) = ko h$ auf G superharmonisch, da nach [16], 3.6 aus $h_1 \leq h_2 \leq \dots$ ($h_v \in \mathcal{H}$) folgt $\sup h_v \in \mathcal{H}$.

1) Üblicherweise können superharmonische Funktionen auch $+\infty$ als Wert annehmen

§ 5

Eigenschaften der Kegel $\mathcal{F}^-$ und $\mathcal{F}_0$ und Stabilitätssätze

Aus dem Beweis von Lemma 7 geht hervor, welche Rolle die (S)-Bedingung in konvexen inf-Kegeln aus $\mathbb{R}^{+E}$ spielt: Die Stabilität solch einer Funktionenmenge bezüglich $f \longrightarrow \inf(1, i_+) \circ f = \inf(1, f)$ stellt einen gewissen Ersatz für die konstante Funktion 1, das heißt, für die Stabilität bezüglich $f \longrightarrow 1$, dar, und es ergab sich überdies (Theorem 1), daß in jedem abgeschlossenen, konvexen inf-Kegel beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^{+E}$ jede nicht affin-lineare Funktion aus $\mathcal{F}$ die Rolle von $\inf(1, i_+)$ übernehmen kann. Man kann nun daran denken, an die Stelle der Funktion $\inf(1, i_+)$ eine andere, nicht in $\mathcal{F}$ liegende Funktion zu setzen, die ebenfalls einen gewissen Ersatz für die konstante Funktion 1 leistet. Je besser - grob gesprochen - dieser Ersatz sein wird, desto weitreichender wird der zugehörige Stabilitäts- beziehungsweise Approximationssatz sein, was die Sätze 5 und 6 demonstrieren mögen.

Lemma 8: Es sei $q \in \mathcal{F}^{-1}$ mit $q(0) > 0$ und $q(1) = 1$. Dann konvergiert die Folge $\{q^{(n)}\}_{n=1,2,\dots}$ auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1.

Beweis: Es gilt für alle $0 < \alpha < 1$ die Beziehung

$$q(\alpha) = q((1-\alpha)0 + \alpha 1) \geq (1-\alpha)q(0) + \alpha q(1) = (1-\alpha)q(0) + \alpha > 0$$

und für alle $\alpha > 1$ gilt die Beziehung $1 \leq q(\alpha) < \alpha$.

Aus $q(\alpha) \geq \alpha$ für ein $\alpha > 1$ würde nämlich folgen

$$q(1) = q((1-\frac{1}{\alpha})0 + \frac{1}{\alpha}\alpha) \geq (1-\frac{1}{\alpha})q(0) + \frac{1}{\alpha}q(\alpha) \geq (1-\frac{1}{\alpha})q(0) + 1 > 1.$$

Wegen der Monotonie von q , wegen $q(0) > 0$ und wegen $q(1) = 1$ gilt dann für jedes $0 \leq \alpha < 1$ die Beziehung $1 \geq q^{(2)}(\alpha) \geq q(\alpha)$

und allgemeiner gilt für jedes $n=2,3,\dots$ und jedes $0 \leq \alpha < 1$ die Beziehung $1 \geq q^{(n)}(\alpha) \geq q^{(n-1)}(\alpha)$. Die Folge $\{q^{(n)}(\alpha)\}_{n=1,2,\dots}$ ist also für jedes $0 \leq \alpha \leq 1$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent gegen eine reelle Zahl α' mit $0 < \alpha' \leq 1$. Da aus

$0 \leq \alpha' < 1$ die Beziehung $q(\alpha') > \alpha'$ folgen würde, ist $\alpha' = 1$.

Für jedes $\beta > 1$ gilt $1 = q(1) \leq q^{(2)}(\beta) \leq q(\beta) < \beta$ und allgemeiner $1 \leq q^{(n)}(\beta) \leq q^{(n-1)}(\beta)$, ($n=2,3,\dots$). Somit ist die Folge

1) § 1, Beispiel 8

$\{q^{(n)}(\beta)\}_{n=1,2,\dots}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent gegen ein β' mit $\beta' \geq 1$. Da aus $\beta' > 1$ die Beziehung $q(\beta') < \beta'$ folgen würde, ist $\beta' = 1$. Zu jedem vorgegebenen Paar ε, γ mit $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ existieren somit zwei ganze Zahlen n', n'' derart, daß gilt $1 - q^{(n')}(0) < \varepsilon, |1 - q^{(n'')}(1)| < \varepsilon$. Da für jede ganze Zahl m die Funktion $q^{(m)}$ wachsend ist, gilt dann für alle $n \geq \max(n', n'')$ und alle $\alpha \in [0, \gamma]$ die Ungleichung $|1 - q^{(n)}(\alpha)| < \varepsilon$.

Daraus ergibt sich folgende Erzeugbarkeitsaussage über $\mathcal{T}^-$:

Lemma 9: Es sei $q \in \mathcal{T}^-$ mit $q(0) > 0$. Dann ist der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe, q -stabile inf-Kegel der Kegel $\mathcal{T}^-$.

Beweis: $\mathcal{T}^-$ sei der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe, q -stabile inf-Kegel. Nach Lemma 8 enthält $\mathcal{T}^-$ die positiven konstanten Funktionen, da ohne Einschränkung der Allgemeinheit $q(1) = 1$ angenommen werden kann. Also liegt die Funktion $\inf(1, i_+)$ in $\mathcal{T}^-$. Somit enthält $\mathcal{T}^-$ den von i_+ erzeugten, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossenen, konvexen, der (S)-Bedingung genügenden inf-Kegel, was nach Lemma 7 die Beziehung $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^-$ nach sich zieht. Da $\mathcal{T}^-$ konvex ist und die positiven Konstanten enthält und da jede Funktion aus $\mathcal{T}^-$ von der Gestalt $\alpha + k$ mit $\alpha \geq 0, k \in \mathcal{T}$ ist, gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^-$. Die dazu duale Relation ist klar.

Daraus ergibt sich folgender Stabilitätssatz:

Satz 5: Jeder bezüglich einer Funktion $q \in \mathcal{T}^-$ mit $q(0) > 0$ stabile, bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene, konvexe inf-Kegel $\mathcal{K}^-$ beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^{+E}$ ist $\mathcal{T}^-$ -stabil.

Beweis: Es sei ein $f \in \mathcal{K}^-$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $\gamma > 0$ mit $0 \leq f(x) \leq \gamma$ für alle $x \in E$. Gemäß Lemma 8 konvergiert die Folge (ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $q(1) = 1$) $\{q^{(n)} \circ f\}_{n=1,2,\dots}$ auf $[0, \gamma]$ gleichmäßig gegen 1. Da $\mathcal{K}^-$ q -stabil

und abgeschlossen ist bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, gilt $1 \in \mathcal{K}^-$ und da $\mathcal{K}^-$ ein Kegel ist, enthält $\mathcal{K}^-$ die positiven Konstanten. $\mathcal{K}^-$ ist aber auch ein inf-Kegel, so daß also gilt $\inf(1, f^-) \in \mathcal{K}^-$, das heißt, $\mathcal{K}^-$ genügt der (S)-Bedingung. Aus Theorem 1 folgt dann, daß $\mathcal{K}^-$ $\mathcal{T}$ -stabil ist. Für jedes $\alpha \geq 0$ und jedes $k \in \mathcal{T}$ gilt $(\alpha + k) \circ f = \alpha + k \circ f$ und da $\mathcal{K}^-$ $\mathcal{T}$ -stabil und konvex ist und die positiven Konstanten enthält, liegt $\alpha + k \circ f$ ($\alpha \geq 0$, $k \in \mathcal{T}$) in $\mathcal{K}^-$. Da jede Funktion aus $\mathcal{T}^-$ die Gestalt $\alpha + k$ mit $\alpha \geq 0$, $k \in \mathcal{T}$ hat, ist $\mathcal{K}^-$ $\mathcal{T}^-$ -stabil.

Lemma 10: Es sei u eine unstetige Funktion aus $\mathcal{T}_0$ (§ 1, Beispiel 7) mit $u(1) = 1$. Dann konvergiert die Folge $\{u^{(n)}\}_{n=1,2,\dots}$ auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen die Funktion e^- mit $e^-(0) = 0$ und $e^-(\alpha) = 1$ für alle $\alpha > 0$.

Beweis: Nach Kapitel 0, Lemma 1 ist u_0 , die Einschränkung von u auf $\mathbb{R}^+ \cap \{0\}$, auf $\mathbb{R}^+ \cap \{0\}$ stetig. u^- sei die stetige Fortsetzung von u_0 auf $\mathbb{R}^+$. Diese existiert wegen der Monotonie von u_0 und es gilt $u^- \in \mathcal{T}^-$, was man auf Grund von [4], chap. IV, § 5.2 ff. nachprüfen kann. Wegen der Unstetigkeit von u ist $u^-(0) > 0$. Nach Lemma 8 konvergiert dann die Folge $\{u^{-(n)}\}_{n=1,2,\dots}$ auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1. Es ist klar, daß dann die Folge $\{u^{(n)}\}_{n=1,2,\dots}$ auf jedem Kompaktum von $\mathbb{R}^+$ gleichmäßig gegen e^- konvergiert.

Daraus ergibt sich die folgende Erzeugbarkeitsaussage über $\mathcal{T}_0$:

Lemma 11: Es sei u eine unstetige Funktion aus $\mathcal{T}_0$. Dann ist $\mathcal{T}_0$ der von i_+ erzeugte, u -stabile, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe inf-Kegel.

Beweis: $\mathcal{T}_0'$ sei der von i_+ erzeugte, u -stabile, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe inf-Kegel. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $u(1) = 1$ annehmen. Nach Lemma 10 liegt die wie dort definierte Funktion e^- in $\mathcal{T}_0'$. Folglich liegt $\inf(e^-, i_+) = \inf(1, i_+)$ in $\mathcal{T}_0'$. Also liegt der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe, der (S)-Bedingung genügende inf-Kegel

in $\mathcal{T}'_0$, was nach Lemma 7 die Beziehung $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'_0$ zur Folge hat. Da $\mathcal{T}'_0$ konvex ist und da jede Funktion aus $\mathcal{T}_0$ die Gestalt $\alpha e^- + k$ mit $\alpha \geq 0, k \in \mathcal{T}$, hat, ergibt sich $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}'_0$. Die dazu duale Relation ist klar.

Daraus resultiert folgender Stabilitätssatz:

Satz 6: Jeder bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene, konvexe, bezüglich einer unstetigen Funktion aus $\mathcal{T}_0$ stabile inf-Kegel beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^{+E}$ ist $\mathcal{T}_0$ -stabil.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich, ausgehend vom Lemma 10 und der Tatsache, daß jede Funktion aus $\mathcal{T}_0$ von der Gestalt $\alpha e^- + k$ mit $\alpha \geq 0, k \in \mathcal{T}$, ist, ganz analog dem Beweis des Satzes 5.

B

Sup-Kegel

§ 6

Definition und Beispiele

Definition 4: Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^E$ heißt ein sup-Kegel, wenn $\mathcal{U}$ ein bezüglich der Operation $(f, g) \longrightarrow \sup(f, g)$ ($f, g \in \mathcal{U}$) stabiler Kegel ist.

Offenbar ist $-\mathcal{U}$ ein inf-Kegel, wenn $\mathcal{U}$ ein sup-Kegel ist.

Beispiele konvexer sup-Kegel:

- 1) $\mathcal{L}^+$;
- 2) die Menge der Einschränkungen von Funktionen aus $\mathcal{L}^+$ auf $[0, \gamma]$, $\gamma > 0$;
- 3) die Menge der auf einer konvexen Teilmenge eines Vektorraumes über $\mathbb{R}$ reellen, konvexen Funktionen;
- 4a) die Menge $\mathcal{U}(X; F_1, F_2)$ derjenigen auf einem Hausdorff-Raum X stetigen Funktionen u , für die
 - (a) $\int u d\sigma_v \geq u(x_v)$ ist für alle $v \in I$ und
 - (b) $\int u d\tau_\mu \geq 0$ ist für alle $\mu \in J$,
 wobei F_1, F_2 so definiert seien wie in § 1, Beispiel 4a);
- 4b) die Menge der auf einem Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) reellen, subharmonischen Funktionen;
- 5) die Menge $\mathcal{V}$ der auf $\mathbb{R}^+$ reellen, konvexen, wachsenden, im Nullpunkt verschwindenden Funktionen¹⁾;
- 6) die Menge der Restriktionen von Funktionen aus $\mathcal{V}$ auf $[0, \gamma]$, $\gamma > 0$;
- 7) die Menge $\mathcal{V}^-$ der auf $\mathbb{R}^+$ reellen, nicht-negativen, konvexen, wachsenden Funktionen.

Bemerkung: Die in 4a), 4b), 5) und 7) erklärten Kegel sind bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossen.

§ 7

Eigenschaften des sup-Kegels $\mathcal{V}$

Nachfolgend studieren wir den in § 6, Beispiel 5 definierten Kegel $\mathcal{V}$.

Satz 7: $\mathcal{V}$ ist in sich stabil.

Beweis: Die Hintereinanderschaltung zweier auf $\mathbb{R}^+$ stetiger, wachsender, im Nullpunkt verschwindender Funktionen liefert eine Funktion mit denselben Eigenschaften. Außerdem ist für $f, g \in \mathcal{V}$ die Funktion $f \circ g$ auf $\mathbb{R}^+$ konvex; denn es gilt für jedes Paar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ und

¹⁾ Da jede auf einem abgeschlossenen Intervall von $\mathbb{R}$ reelle, konvexe, wachsende Funktion im linken Intervallendpunkt stetig ist, sind insbesondere alle Funktionen aus $\mathcal{V}$ (im Nullpunkt) stetig.

jedes $0 < \gamma < 1$

$f \circ g(\gamma\alpha + (1-\gamma)\beta) \leq f(\gamma g(\alpha) + (1-\gamma)g(\beta)) \leq f \circ g(\alpha) + (1-\gamma)f \circ g(\beta)$,
wobei erstere Ungleichung aus der Konvexität von g und der Monotonie von f und letztere Ungleichung aus der Konvexität von f folgt.

Die Erzeugbarkeitsaussage über $\mathcal{T}$ wird bedeutend schwächer sein als diejenige über $\mathcal{V}$. Beispielsweise liegt $\sup(0, i_+ - 1)$ zwar in $\mathcal{T}$, nicht aber in dem von i_+ erzeugten, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossenen, konvexen, bezüglich der Funktion $g := i_+^2$ stabilen sup-Kegel $\mathcal{U}$.
Andernfalls gäbe es nämlich zu $\varepsilon = \frac{1}{9}$ endlich viele Polynome $P_1, \dots, P_m$ mit lauter nicht-negativen Koeffizienten der Gestalt $P_\mu = \sum_{v=1}^n \alpha_{v,\mu} x^v$ ($\mu=1, \dots, m$) derart, daß für alle $x \in [0, 4]$ gälte

$$|\sup(P_1(x), \dots, P_m(x)) - \sup(0, x-1)| < \varepsilon.$$

Daraus ergäbe sich (für $x=1$)

$$I \quad \sum_{v=1}^{n_{\mu}} \alpha_{v,\mu} < \varepsilon \quad (\mu=1, \dots, m).$$

Außerdem müßten für ein μ_1 mit $1 \leq \mu_1 \leq m$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$II \quad \left| \sum_{v=1}^{n_{\mu_1}} \alpha_{v,\mu_1} 2^v - 1 \right| < \varepsilon,$$

$$III \quad \sum_{v=1}^{n_{\mu_1}} \alpha_{v,\mu_1} 4^v < 3 + \varepsilon.$$

I, III und die aus II resultierende Ungleichung

$$II' \quad \sum_{v=1}^{n_{\mu_1}} \alpha_{v,\mu_1} 2^v > 1 - \varepsilon$$

widersprechen jedoch einander. Unter Berücksichtigung von I und II' ergibt sich nämlich aus III

$$\begin{aligned} III' \quad \sum_{v=1}^{n_{\mu_1}} 4^v \alpha_{v,\mu_1} &= 4 \alpha_{1,\mu_1} + \sum_{v=2}^{n_{\mu_1}} 4^v \alpha_{v,\mu_1} \geq 4 \alpha_{1,\mu_1} + 4 \sum_{v=2}^{n_{\mu_1}} 2^v \alpha_{v,\mu_1} = \\ &= 4 \sum_{v=1}^{n_{\mu_1}} 2^v \alpha_{v,\mu_1} - 4 \alpha_{1,\mu_1} > 4 - 4\varepsilon - 4 \alpha_{1,\mu_1} > 4 - 8\varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $3 + \varepsilon > 4 - 8\varepsilon$ und somit $\varepsilon > \frac{1}{9}$, was falsch ist.

$\mathcal{T}$ enthält jedoch eine echte Teilmenge $\mathcal{Q}$ derart, daß für jedes $q \in \mathcal{Q}$ der von i_+ erzeugte, (konvexe), bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, q -stabile sup-Kegel gerade die Menge $\mathcal{T}$ ist.

Hierzu stellen wir der (S)-Bedingung folgende Bedingung gegenüber:

Definition 5: Eine Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^E$ genügt der (T) - Bedingung, wenn $\mathcal{K}$ bezüglich der Operation $f \longrightarrow \sup(0, f-1)$, $f \in \mathcal{K}$, stabil ist.

Lemma 12: t sei eine auf $\mathbb{R}^+$ reelle, konvexe, wachsende Funktion mit $t(0) \leq 0$. Für $0 \leq \gamma' < \gamma''$ ist dann $a_{\mathbb{R}^+}[t; \gamma', \gamma''] = \beta' i_+ - \beta''$ mit $\beta', \beta'' \in \mathbb{R}^+$.

Beweis: Nach Kapitel 0, Definition 3 haben wir

(a) $t(\gamma'') - t(\gamma') \geq 0$, (b) $\gamma'' t(\gamma') - \gamma' t(\gamma'') \leq 0$
nachzuweisen, wobei (a) wegen der Monotonie von t klar ist.
(b) ergibt sich so: Es ist $\gamma' = (1 - \frac{\gamma'}{\gamma''}) 0 + \frac{\gamma'}{\gamma''} \gamma''$, woraus wegen $t(0) \leq 0$ und wegen der Konvexität von t folgt
 $t(\gamma') \leq (1 - \frac{\gamma'}{\gamma''}) t(0) + \frac{\gamma'}{\gamma''} t(\gamma'') \leq \frac{\gamma'}{\gamma''} t(\gamma'')$.

Lemma 13: Der von i_+ erzeugte, der (T)-Bedingung genügende Kegel $\mathcal{U}$ enthält jede Funktion der Gestalt $\sup(0, \alpha i_+ - \beta)$ mit $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Beweis: Für $\beta = 0$ ist das klar und für $\beta > 0$ ergibt sich die Behauptung wie folgt: Da $\mathcal{U}$ ein Kegel ist, der i_+ enthält, liegt $\frac{\alpha}{\beta} i_+$ in $\mathcal{U}$ und da $\mathcal{U}$ ein der (T)-Bedingung genügender Kegel ist, liegt auch $\beta[\sup(0, i_+ - 1) \circ (\frac{\alpha}{\beta} i_+)] = \sup(0, \alpha i_+ - \beta)$ in $\mathcal{U}$.

Daraus ergibt sich die folgende Erzeugbarkeitsaussage über $\mathcal{K}$:

Satz 8: $\mathcal{K}$ ist der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, der (T) - Bedingung genügende sup - Kegel.

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, der (T)-Bedingung genügende sup-Kegel. Die Relation $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ ist auf Grund von Satz 7 klar; wir beweisen die dazu duale Relation. Seien $t \in \mathcal{K}$, $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$ beliebig vorgegeben. Da $-t$ auf $K := [0, \gamma]$ stetig und konkav ist, existiert nach den Lemmata 1 und 2 eine Zerlegung $0 = \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \gamma$ von K derart, daß für alle $\alpha \in K$ gilt

$$\begin{aligned} & | -t(\alpha) + \inf_{v=1, \dots, n-1} (a_{\mathbb{R}^+}[-t; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)) | = \\ & = | t(\alpha) - \sup_{v=1, \dots, n-1} (a_{\mathbb{R}^+}[t; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)) | < \epsilon. \end{aligned}$$

Wir setzen abkürzend $a_v := a_{\mathbb{R}^+}[t; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$ ($v=1, \dots, n-1$).

Da $t(0) = 0$ ist, hat nach Lemma 12 jedes a_v ($v=2, \dots, n-1$)

die Gestalt $\alpha_1 \cdot \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ und es ist speziell $a_1 = \alpha' \cdot 1$ mit $\alpha' \in \mathbb{R}^+$, also $a_1 \geq 0$. Daher gilt

$$\sup(a_1, \dots, a_{n-1}) = \sup(\sup(0, a_1), \dots, \sup(0, a_{n-1})).$$

Da $\mathcal{U}$ ein sup-Kegel ist, folgt daraus zusammen mit Lemma 13, daß die Funktion $\sup(a_1, \dots, a_{n-1})$ in $\mathcal{U}$ liegt. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz liegt somit auch t in $\mathcal{U}$.

§ 8

Stabilitätssätze

In diesen Paragraphen, in dem wir die Resultate des vorigen Paragraphen auf Kegel von Funktionen, die auf einer beliebigen Menge E definiert sind, anwenden, sei $\mathbb{R}^E$ und erst recht jede Teilmenge davon mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz versehen.

Satz 9: Jeder abgeschlossene, die konstanten Funktionen enthaltende, konvexe sup-Kegel $\mathcal{U}$ beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^E$ ist stabil bezüglich jeder auf $\mathbb{R}$ reellen, wachsenden, konvergen Funktion.

Beweis: Es sei ein $u \in \mathcal{U}$, ein $\varepsilon > 0$ und eine auf $\mathbb{R}$ reelle, konvexe, wachsende Funktion t vorgegeben. Wegen der Beschränktheit von u existieren zwei reelle Zahlen γ', γ'' mit $\gamma' \leq u(x) \leq \gamma''$ für alle $x \in E$.

$-t$ ist auf $K := [\gamma', \gamma'']$ stetig und konkav. Nach den Lemmata 1 und 2 gibt es daher eine Zerlegung $\gamma' = \gamma_1 < \dots < \gamma_{n+1} = \gamma''$ von K derart, daß für alle $x \in K$ gilt

$$|-t(x) + \inf_{v=1, \dots, n} a_v[-t; \gamma_v, \gamma_{v+1}](x)| = |t(x) - \sup_{v=1, \dots, n} a_v[t; \gamma_v, \gamma_{v+1}](x)| < \varepsilon.$$

Wegen der Monotonie von t gilt dann

$$a_v := a[t; \gamma_v, \gamma_{v+1}] = \alpha_v \cdot 1 + \beta_v \quad \text{mit} \quad \alpha_v \in \mathbb{R}^+ \quad (v=1, \dots, n).$$

Folglich gilt für alle $x \in E$ die Beziehung

$$\begin{aligned} |t \circ u(x) - \sup(a_1, \dots, a_n) \circ u(x)| &= \\ &= |t \circ u(x) - \sup(\alpha_1 u(x) + \beta_1, \dots, \alpha_n u(x) + \beta_n)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{U}$ ein die konstanten Funktionen enthaltender, konvexer sup-Kegel ist, liegt die Funktion $\sup_{v=1, \dots, n} (\alpha_v u + \beta_v)$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ auch die Funktion tou in $\mathcal{U}$.

Theorem 2: Jeder abgeschlossene, konvexe sup-Kegel $\mathcal{U}$ beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^+ E$, der der (T) - Bedingung genügt, ist γ - stabil.

Beweis: Es seien ein $u \in \mathcal{U}$, ein $t \in \gamma$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $\gamma > 0$ mit $0 \leq u(x) \leq \gamma$ für alle $x \in E$.
 t ist auf $K := [0, \gamma]$ stetig und konkav. Daher existiert nach den Lemmata 1 und 2 eine Zerlegung $0 = \gamma_1 < \dots < \gamma_{v+1} = \gamma$ von K mit
 $|t(\alpha) - \sup_{v=1, \dots, n} a_{R^+}[t; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)| < \varepsilon$ für alle $\alpha \in K$
 und nach Lemma 12 ist $a_v := a_{R^+}[t; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$ von der Gestalt $\alpha_v i_v - \beta_v$ mit $\alpha_v, \beta_v \in \mathbb{R}^+$ ($v=1, \dots, n$) und speziell ist wegen $t(0) = 0$ $\beta_1 = 0$, also $a_1 \geq 0$. Daraus aber folgt, daß
 $\sup(a_1, \dots, a_n) = \sup(\sup(0, a_1), \dots, \sup(0, a_n))$ ist.
 Somit gilt für alle $x \in E$ die Beziehung
 $|tu(x) - \sup_{v=1, \dots, n} (\sup(0, \alpha_v u(x) - \beta_v))| < \varepsilon$.
 Da $\mathcal{U}$ der (T)-Bedingung genügt und ein sup-Kegel ist, liegt die Funktion $\sup_{v=1, \dots, n} (\sup(0, \alpha_v u - \beta_v))$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ auch die Funktion tou in $\mathcal{U}$.

Man beachte, daß beim Beweis dieses Theorems die Konvexität von $\mathcal{U}$ nicht verwendet wurde. Theorem 2 gilt also auch dann, wenn man von dem Kegel $\mathcal{U}$ nicht voraussetzt, daß er konvex ist. Es ist jedoch nicht so, daß jeder abgeschlossene, der (T)-Bedingung genügende sup-Kegel automatisch konvex ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $K := [0, 1]$, i_K die Restriktion von i auf K . Auf K definieren wir folgende zwei Funktionen: $f := i_K$, $g := -i_K + 1$. $\mathcal{U}$ sei der kleinste abgeschlossene, der (T)-Bedingung genügende sup-Kegel, der f und g enthält; $\mathcal{D}$ sei der kleinste konvexe Kegel, der f und g enthält. Wie zeigen: $1 \notin \mathcal{U}$, $1 \in \mathcal{D}$. Letzteres ist trivial, da $f + g = 1$ und $\mathcal{D}$ konvex ist. Nun sei $k[\alpha, \beta, \gamma] := \sup(0, \sup(\alpha f, \beta g) - \gamma)$. Für $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ liegt $k[\alpha, \beta, \gamma]$ in $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}$ ist offenbar die abgeschlossene Hülle der Menge $\{k[\alpha, \beta, \gamma]; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+\}$.

Wäre $1 \in \mathcal{U}$, so gäbe es zu $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ein $k[\alpha, \beta, \gamma] \in \mathcal{U}$ mit $|k[\alpha, \beta, \gamma] - 1| < \varepsilon$.
Daraus würde wegen

$$(1) \quad \begin{aligned} k[\alpha, \beta, \gamma](0) &= \sup(0, \beta - \gamma) , \\ k[\alpha, \beta, \gamma](\frac{1}{2}) &= \sup(0, \frac{1}{2}\sup(\alpha, \beta) - \gamma) , \\ k[\alpha, \beta, \gamma](1) &= \sup(0, \alpha - \gamma) \end{aligned}$$

folgen

$$(2) \quad \begin{aligned} |\beta - \gamma - 1| &< \varepsilon , \\ |\alpha - \gamma - 1| &< \varepsilon , \\ |\frac{1}{2}\sup(\alpha, \beta) - \gamma - 1| &< \varepsilon . \end{aligned}$$

Da (2) in α und β symmetrisch ist, sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\alpha \geq \beta$. Dann aber folgt aus (2)

$$\begin{aligned} \gamma + 1 - \varepsilon &< \alpha < \gamma + 1 + \varepsilon , \\ 2\gamma + 2 - 2\varepsilon &< \alpha < 2\gamma + 2 + 2\varepsilon , \\ 2\gamma + 2 - 2\varepsilon &< \gamma + 1 + \varepsilon , \end{aligned}$$

also

das heißt $\varepsilon > \frac{1}{3}$, was falsch ist.

§ 9

Anwendung auf subharmonische Funktionen

Eine auf einem Gebiet G des $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) definierte Funktion u heißt auf G subharmonisch, wenn $-u$ auf G superharmonisch ist.

Auf Grund dieser Definition ist klar, daß die Menge der auf einem Gebiet G des $\mathbb{R}^n$ reellen, subharmonischen Funktionen ein bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossener, konvexer, die konstanten Funktionen enthaltender sup-Kegel ist. Auf Grund des Satzes 9 und der Untersuchungen in § 4 sowie wegen [4], chap. IV, § 6.2 ist weiter klar, daß $t \circ u$ auf G subharmonisch ist, wenn t irgendeine auf $\mathbb{R}$ reelle, wachsende, konvexe Funktion und u irgendeine auf G reelle, subharmonische Funktion ist.

In [16], 2.12 betrachtet Radó eine Menge von Funktionen auf einem Gebiet G des $\mathbb{R}^2$, die er wie folgt kennzeichnet und die "Klasse PL" nennt:
 u liegt in der Klasse PL, wenn

$$(1) \quad u \geq 0 \qquad (2) \quad v := \log u \text{ auf } G \text{ subharmonisch ist.}$$

Dann beweist Radó, daß jede Funktion der Klasse PL auf G subharmonisch ist. Das aber ergibt sich für $u > 0$ daraus, daß die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ reell, konvex und wachsend ist. Daher ist $\exp(v) = \exp(\log u) = u$ auf G subharmonisch. Der Fall $u \geq 0$ bringt nur formale Schwierigkeiten mit sich.

§ 10

Eigenschaften des Kegels $\tilde{\gamma}$ und ein Stabilitätssatz

Wir wollen zum Abschluß dieses Abschnittes noch den in § 6, Beispiel 7 erklärten Kegel $\tilde{\gamma}$ näher betrachten.

Lemma 14: Es sei $r \in \tilde{\gamma}$ mit $r(0) > 0$. Dann enthält der von i_+ erzeugte, r -stabile, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene Kegel die positiven Konstanten.

Beweis: Sei ein $\gamma > 0$ beliebig vorgegeben. Wir definieren $r_\gamma := \frac{\gamma}{1+r(\gamma)} r$. Dann ist $r_\gamma(0) > 0 = i_+(0)$, $r_\gamma(\gamma) < \gamma = i_+(\gamma)$, so daß wegen der Stetigkeit von r ein $0 < \gamma' < \gamma$ existiert mit $r_\gamma(\gamma') = i_+(\gamma') = \gamma'$. Wegen der Konvexität von r_γ ist dann $r_\gamma(\alpha) > \alpha$ für alle α mit $0 \leq \alpha < \gamma'$ und $r_\gamma(\beta) < \beta$ für alle β mit $\gamma' < \beta \leq \gamma$. Aus der Annahme $r_\gamma(\alpha) \leq \alpha$ für ein $0 \leq \alpha < \gamma'$ würde nämlich folgen

$$r_\gamma(\gamma') = r_\gamma\left(\frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\alpha}\alpha + \left(1 - \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\alpha}\right)\gamma\right) < \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\alpha}\alpha + \left(1 - \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\alpha}\right)\gamma = \gamma'$$

und für jedes β mit $\gamma' < \beta < \gamma$ gilt

$$r_\gamma(\beta) = r_\gamma\left(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\gamma'}, \gamma' + \left(1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\gamma'}\right)\gamma\right) < \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\gamma'}, \gamma' + \left(1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\gamma'}\right)\gamma = \beta.$$

Wegen der Monotonie von r_γ gilt dann für jedes $n=1,2,\dots$ und jedes $\alpha \in [0, \gamma']$ die Beziehung $\gamma' \geq r_\gamma^{(n)}(\alpha) \geq r_\gamma^{(n-1)}(\alpha)$. Also ist die Folge $\{r_\gamma^{(n)}(\alpha)\}_{n=1,2,\dots}$ für jedes $\alpha \in [0, \gamma']$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Für jedes $\beta \in [\gamma', \gamma]$ ist analog die Folge $\{r_\gamma^{(n)}(\beta)\}_{n=1,2,\dots}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, also ebenfalls konvergent. Wie beim Beweis von Lemma 8 ergibt sich daher, daß beide Folgen gegen γ' konvergieren und daß die Folge $\{r_\gamma^{(n)}\}_{n=1,2,\dots}$ auf $[0, \gamma]$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion γ' konvergiert.

Daraus ergibt sich folgende Erzeugbarkeitsaussage über $\tilde{\gamma}$:

Satz 10: Es sei $t_1^- \in \tilde{\gamma}$ mit $t_1^-(0) > 0$ und $\mathcal{U}$ sei der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, der (T) - Bedingung genügende, t_1^- - stabile, konvexe sup - Kegel. Dann ist $\mathcal{U} = \tilde{\gamma}$.

Beweis: Jedes $t \in \tilde{\gamma}$ ist von der Gestalt $t = t + \beta$ mit $t \in \tilde{\gamma}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Da $\mathcal{U}$ der (T) - Bedingung genügt, folgt aus Satz 8 die Beziehung $\tilde{\gamma} \subset \mathcal{U}$. Nach Lemma 14 liegen wegen der Stabilität von $\mathcal{U}$ bezüglich t_1^- und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ die konstanten Funktionen in $\mathcal{U}$, so daß wegen der Konvexität von $\mathcal{U}$ gilt $\tilde{\gamma} \subset \mathcal{U}$. Die dazu duale Relation ist trivial.

Der Beweis des folgenden Stabilitätssatzes ergibt sich auf Grund von Lemma 14 ganz analog den Beweisen der bisher gebrachten Stabilitätssätze.

Satz 11: Jeder bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene, der (T) - Bedingung genügende, bezüglich einer Funktion $q \in \tilde{\gamma}$ mit $q(0) > 0$ stabile, konvexe sup - Kegel beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^{+E}$ ist $\tilde{\gamma}$ - stabil.

C

Verbandskegel

§ 11

Definition und Beispiele

Definition 6: Eine Teilmenge $\mathcal{M}$ aus $\mathbb{R}^E$ heißt ein Verbandskegel, wenn sie ein bezüglich der Operationen $(f, g) \longrightarrow \inf(f, g)$, $(f, g) \longrightarrow \sup(f, g)$ ($f, g \in \mathcal{M}$) stabiler Kegel ist.

Aus dieser Definition und den in § 1 und § 6 aufgeführten Beispielen von inf- und sup-Kegeln ergeben sich in einfacher Weise die folgenden Beispiele für Verbandskegel:

- 1) $\mathcal{L}^+$;
- 2) die Menge $\mathcal{M}$ aller auf $\mathbb{R}^+$ reellen, stetigen, wachsenden, im Nullpunkt verschwindenden Funktionen;
- 3) die Menge $\mathcal{M}^-$ aller auf $\mathbb{R}^+$ reellen, stetigen, wachsenden, nicht-negativen Funktionen.

§ 12

Eigenschaften des Verbandskegels $\mathcal{M}$

Satz 12: $\mathcal{M}$ ist in sich stabil.

Beweis: Die Hintereinanderschaltung zweier auf $\mathbb{R}^+$ stetiger, reeller, wachsender, im Nullpunkt verschwindender Funktionen liefert eine Funktion mit denselben Eigenschaften.

Satz 13: $\mathcal{M}$ ist der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe, der (S)- und (T)-Bedingung genügende Verbandskegel.

Beweis: Sei $\mathcal{D}$ der von i_+ erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe, der (S)- und (T)-Bedingung genügende Verbandskegel. Daß $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ gilt, folgt aus Satz 12. Zeigen wir die dazu duale Relation. Dazu seien ein $w \in \mathcal{M}$, $\gamma > 0$, $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Lemma 1 existiert eine Zerlegung $0 = \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \gamma$ von $[0, \gamma]$ derart, daß für jedes $\alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ gilt $|a_{R^+}[w; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha) - w(\alpha)| < \epsilon$ ($v=1, \dots, n-1$). Dabei ist $a_{R^+}[w; \gamma_v, \gamma_{v+1}] = \beta'_v i_+ + \beta''_v$ und wegen der Monotonie von w , $\beta'_v \in \mathbb{R}^+$ ($v=1, \dots, n-1$). Aus den $a_{R^+}[w; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$ konstruieren wir nun folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} h_v &:= \sup(0, \beta_v' i_+ + \beta_v''), & \text{falls } \beta_v'' \leq 0 \text{ ist,} \\ h_v &:= \beta_v' i_+ + \beta_v'' \inf(1, \beta i_+) \text{ mit } \beta > \gamma_2^{-1}, & \text{falls } \beta_v'' > 0 \text{ ist} \\ & & (v=1, \dots, n-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_v &:= \sup(0, (\gamma_v - \gamma_{v-1})^{-1} w(\gamma_v) [i_+ - \gamma_{v-1}]) & (v=2, \dots, n-1), \\ m_1 &:= h_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_v &:= \inf(h_v, m_v), & \text{falls } m_v(\gamma_{v+1}) > h_v(\gamma_{v+1}), \\ q_v &:= h_v, & \text{falls } m_v(\gamma_{v+1}) = h_v(\gamma_{v+1}), \quad (v=1, \dots, n-1) \\ q_v &:= \sup(h_v, m_v), & \text{falls } m_v(\gamma_{v+1}) < h_v(\gamma_{v+1}); \end{aligned}$$

$$r_v := \inf(w(\gamma_{v+1}), q_v) \quad (v=1, \dots, n-1).$$

Auf $[\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ ($v=1, \dots, n-1$) stimmt h_v mit $a_{R^+}[w; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$ überein, was für $\beta_v'' \leq 0$ trivial ist (es ist also insbesondere $h_1 = a_{R^+}[w; \gamma_1, \gamma_2]$) und für $\beta_v'' > 0$ daraus folgt, daß $\beta^{-1} < \gamma_2$ ist. Sei nämlich $\alpha \geq \gamma_2$ und $\beta_v'' > 0$. Dann ist $h_v(\alpha) = \beta_v' \alpha + \beta_v'' \inf(1, \beta \alpha) = \beta_v' \alpha + \beta_v''$, da $\beta \alpha > \gamma_2^{-1} \gamma_2 = 1$. Nach Konstruktion der r_v gilt dann $r_v(\alpha) = h_v(\alpha) = a_{R^+}[w; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)$ für alle $\alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ und $r_v(\alpha) \leq a(\alpha)$ für alle $\alpha \in [0, \gamma_v] \cup [\gamma_{v+1}, \gamma]$ ($v=1, \dots, n-1$), wobei a diejenige reelle Funktion auf $[0, \gamma]$ ist, die auf $[\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ mit $a_{R^+}[w; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$ übereinstimmt ($v=1, \dots, n-1$). Folglich ist $\sup(r_1, \dots, r_{n-1}) = a$ und es gilt $a \in \mathcal{D}$ und $|a(\alpha) - w(\alpha)| < \epsilon$ für alle $\alpha \in [0, \gamma]$. Dann aber liegt w in $\mathcal{D}$.

Bemerkung: Dieser Satz kann noch dahingehend verallgemeinert werden, daß man von $\mathcal{D}$ anstelle der Gültigkeit der (S)-Bedingung dessen Stabilität bezüglich einer nicht affin-linearen Funktion aus $\mathcal{T}$ voraussetzt. Das folgt aus Lemma 6.

§ 13

Ein Stabilitätssatz

Theorem 3: $\mathcal{D}$ sei ein bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossener, konvexer Verbandskegel reeller, beschränkter, nicht-negativer Funktionen auf E , der der (T)-Bedingung genügt und bezüglich einer nicht affin-linearen Funktion k aus $\mathcal{T}$ stabil ist. Dann ist $\mathcal{D}$ $\mathcal{M}$ -stabil.

Insbesondere gilt also, daß $\mathfrak{D}$ mit jeder Funktion f auch die Funktion f^γ enthält, wenn $\gamma > 0$ ist.

Beweis: Da $\mathfrak{D}$ insbesondere ein inf-Kegel ist, folgt wie beim Beweis von Theorem 1, daß $\mathfrak{D}$ der (S)-Bedingung genügt. Aus dem Satz 13 ergibt sich dann - man schließt genauso wie beim Beweis des Theorems 1 -, daß $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{M}$ -stabil ist.

Bemerkung: Die Struktur des Verbandskegels $\mathfrak{M}^\sim$, dessen Elemente die Gestalt $\alpha + w$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathfrak{M}$, haben, ist auf Grund der Struktur von $\mathfrak{M}$ sowie auf Grund der Paragraphen 5 und 10 klar, weshalb wir weder auf die Erzeugbarkeit von $\mathfrak{M}^\sim$ noch auf den zugehörigen Stabilitätssatz eingehen wollen.

D

Vektorverbände

§ 14

Beispiele

Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ aus $\mathbb{R}^E$ heißt ein Vektorverband, wenn $\mathfrak{M}$ ein bezüglich der Operation $a \longrightarrow -a$ ($a \in \mathfrak{M}$) stabiler, konvexer Verbandskegel ist. $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^E$ ist offenbar genau dann ein Vektorverband, wenn $\mathfrak{M}$ bezüglich der beiden Operationen

$$\begin{aligned} (1) \quad & (f, g) \longrightarrow \alpha f + \beta g \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R} ; f, g \in \mathfrak{M}), \\ (2) \quad & f \longrightarrow |f| \end{aligned}$$

stabil ist.

Folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind Vektorverbände:

- 1) $\mathcal{L} := \{\alpha i ; \alpha \in \mathbb{R}\}$;
- 2) die Menge $\mathcal{L}$ aller stetigen Funktionen aus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- 3) die Menge $\mathcal{L}_0$ aller stetigen, im Nullpunkt verschwindenden Funktionen aus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

§ 15

Eigenschaften des Vektorverbandes $\mathcal{L}_0$

Satz 14: $\mathcal{L}_0$ ist in sich stabil.

Beweis: Die Hintereinanderschaltung zweier reeller, im Nullpunkt verschwindender, stetiger Funktionen liefert wieder eine derartige Funktion.

Lemma 15: In jedem Vektorverband $M \subset \mathbb{R}^E$ sind (S)- und (T)-Bedingung einander äquivalent.

Beweis: Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich aus der für alle $f \in M$ gültigen Gleichung $f - \inf(1, f) = \sup(0, f - 1)$.

Satz 15: $\mathcal{L}_0$ ist der von i erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, der (S)-Bedingung genügende Vektorverband.

Beweis:¹⁾ Es sei M der von i erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, der (S)-Bedingung genügende Vektorverband. $M \subset \mathcal{L}_0$ ist wegen Satz 14 klar; wir zeigen $\mathcal{L}_0 \subset M$. Dazu können wir uns jedoch darauf beschränken, zu zeigen, daß $\mathcal{L}_0^+$, die Menge der Restriktionen der Funktionen $\sup(0, f)$ ($f \in \mathcal{L}_0$) auf $\mathbb{R}^+$, in M^+ , der Menge der Restriktionen der Funktionen $\sup(0, v)$ ($v \in M$) auf $\mathbb{R}^+$, liegt. Es ist nämlich $f = \sup(0, f) - \sup(0, -f)$ ($f \in \mathcal{L}_0$) und die Funktion $\inf(1, -i_-)$ leistet auf $\mathbb{R}^-$ ²⁾ dasselbe wie $\inf(1, i_+)$ auf $\mathbb{R}^+$. Sei $f \in \mathcal{L}_0^+$. Zu jedem Paar $\gamma > 0, \varepsilon > 0$ existiert dann nach Lemma 1 eine Zerlegung $0 = \gamma_1 < \dots < \gamma_n = \gamma$ von $[0, \gamma]$ mit $|f(\alpha) - a_{\mathbb{R}^+}[f; \gamma_v, \gamma_{v+1}](\alpha)| < \varepsilon$ für alle $\alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ ($v=1, \dots, n-1$). Hierbei ist $a_{\mathbb{R}^+}[f; \gamma_v, \gamma_{v+1}] = \beta_v' i_+ + \beta_v''$ mit $\beta_v', \beta_v'' \in \mathbb{R}$. ($v=1, \dots, n-1$).

¹⁾ Siehe auch [1], Abschnitt 5.7. (S.174-182) und [15], wo ähnliche Beweismethoden verwendet werden.

²⁾ $\mathbb{R}_-^-$ bezeichnet die Menge aller $\alpha \leq 0$ aus $\mathbb{R}$ und i_- die Restriktion von i auf $\mathbb{R}_-^-$.

Nun konstruieren wir folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} h_v &:= \sup(0, \beta_v' i_+ + \beta_v'') \quad \text{für } \beta_v'' \leq 0 \quad (v=1, \dots, n-1); \\ h_v &:= \beta_v' i_+ + \beta_v'' \inf(1, \beta_v i_+) \text{ mit } \beta > \gamma_2^{-1} \text{ für } \beta_v'' > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_v &:= \sup(0, (\gamma_v - \gamma_{v-1})^{-1} f(\gamma_v) [i_+ - \gamma_{v-1}]) \quad (v=2, \dots, n-1), \\ m_1 &:= h_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_v &:= \sup(0, (\gamma_{v+1} - \gamma_{v+2})^{-1} f(\gamma_{v+1}) [i_+ - \gamma_{v+2}]) \quad (v=1, \dots, n-2), \\ p_{n-1} &:= h_{n-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_v &:= \inf(m_v, h_v, p_v), \quad \text{falls } m_v(\gamma_{v+1}) \geq h_v(\gamma_{v+1}) \text{ und } p_v(\gamma_v) \geq h_v(\gamma_v), \\ s_v &:= \inf(m_v, \sup(h_v, p_v)), \text{ falls } m_v(\gamma_{v+1}) \geq h_v(\gamma_{v+1}) \text{ und } p_v(\gamma_v) < h_v(\gamma_v), \\ s_v &:= \inf(\sup(m_v, h_v), p_v), \text{ falls } m_v(\gamma_{v+1}) < h_v(\gamma_{v+1}) \text{ und } p_v(\gamma_v) \geq h_v(\gamma_v), \\ &\quad (v=1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Auf $[\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ ($v=1, \dots, n-1$) stimmt h_v mit $a_{R^+}[f; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$ überein, was für $\beta_v'' \leq 0$ trivial ist (insbesondere ist also $h_1 = a_{R^+}[f; \gamma_1, \gamma_2]$) und für $\beta_v'' > 0$ aus $\beta^{-1} < \gamma_2$ folgt; für jedes $\alpha \geq \gamma_2$ ist dann nämlich $\beta i_+(\alpha) = \beta \alpha > 1$. Bezeichnet daher a diejenige auf $[0, \gamma]$ reelle Funktion, die für jedes $v=1, \dots, n-1$ auf $[\gamma_v, \gamma_{v+1}]$ mit $a_{R^+}[f; \gamma_v, \gamma_{v+1}]$ übereinstimmt, so hat s_v ($v=1, \dots, n-1$) die Eigenschaften:
 $s_v(\alpha) \leq a(\alpha)$ für alle $\alpha \in [0, \gamma]$ und $s_v(\alpha) = a(\alpha)$ für alle $\alpha \in [\gamma_v, \gamma_{v+1}]$.
 Folglich ist $a = \sup(s_1, \dots, s_{n-1})$, also, da jedes $s_v \in \mathcal{W}^+$ ist, $a \in \mathcal{W}^+$.
 Da weiter nach Konstruktion $|a(\alpha) - f(\alpha)| < \epsilon$ ist für alle $\alpha \in [0, \gamma]$, ist der Beweis erbracht.

Bemerkung: Ist eine Funktion aus $\mathcal{L}_0^+$ von beschränkter Variation, so ist sie die Differenz zweier Elemente aus dem in § 11, Beispiel 2 erklärten Verbandskegel $\mathcal{W}_0^{(1)}$. Somit folgt aus Theorem 3 unmittelbar, daß die Funktionen aus $\mathcal{L}_0^+$, die von beschränkter Variation sind, in $\mathcal{W}^+$ liegen.

Lemma 16: Es sei k eine Funktion aus $\mathcal{L}_0$, deren Restriktion k_+ auf $\mathbb{R}^+$ eine nicht affin-lineare Funktion aus $\mathcal{V}$ ist. Dann enthält der von i erzeugte, bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, k -stabile Vektorverband $\mathcal{W}_k$ die Funktionen $\inf(1, i)$ und $\inf(1, -i)$.

1) [10], 4.7.2, S. 102

Beweis: Da k_+ nicht affin-linear ist, existiert ein $\gamma > 0$ derart, daß k_+ auf $[0, \gamma]$ nicht affin-linear ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen (siehe Satz 2, Lemma 3 und Kapitel 0, Lemma 3), daß $k(1) = 1$ und 1 keine $\mathcal{L}^+$ -Stelle von k_+ ist. Wir setzen $k^- := \sup(0, k)$. (Offenbar liegt k^- in $\mathcal{W}_k$.) Da für jedes $n \geq 2$ gilt $k^-(n) = k_+^{(n-1)} \circ k^- = k^{(n-1)} \circ k^-$, konvergiert auf Grund von Lemma 5 die Folge $\{\inf(k^{(n)} \circ k^-, i)\}_{n=1,2,\dots}$ auf jedem Kompaktum der Gestalt $[-\gamma, \gamma]$, $\gamma > 0$, gleichmäßig gegen $\inf(1, i)$. Da für jedes $n=1,2,\dots$ die Funktion $\inf(k^{(n)} \circ k^-, i)$ in $\mathcal{W}_k$ liegt und $\mathcal{W}_k$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossen ist, liegt $\inf(1, i)$ in $\mathcal{W}_k$. Da für jedes $n=1,2,\dots$ gilt $\inf(k^{(n)} \circ k^- \circ (-1), -1) \in \mathcal{W}_k$, liegt auch die Funktion $\inf(1, -1)$ in $\mathcal{W}_k$.

§ 16

Stabilitätssätze

Auf Grund der Aussage, die Satz 15 über die Struktur des Vektorverbandes $\mathcal{L}_0$ macht, läßt sich durch Schlüsse, die den beim Beweis von Theorem 1 angewandten analog sind, der folgende Stabilitätssatz über Vektorverbände von reellen Funktionen, die auf einer beliebigen Menge definiert sind, gewinnen:

Theorem 4: Es sei E eine beliebige Menge. Jeder bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene, der (S) - Bedingung genügende Vektorverband beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^E$ ist $\mathcal{L}_0$ - stabil.

Bemerkung: Auf Grund von Lemma 16 kann das Theorem 4 noch wie folgt verallgemeinert werden:

Jeder bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene Vektorverband beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^E$, der stabil ist bezüglich einer Funktion $k \in \mathcal{L}_0$, deren Einschränkung k_+ auf $\mathbb{R}^+$ eine nicht affin-lineare Funktion aus $\mathcal{V}$ ist, ist $\mathcal{L}_0$ - stabil.

Dieses Resultat gestattet es, mit unseren Hilfsmitteln den bekannten Satz ([15], Satz 1) zu beweisen:

Satz 16: Jeder bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene Vektorverband $\mathcal{M}$ beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^E$, der der (S) - Bedingung genügt, ist eine Algebra¹⁾.

Beweis: Eine spezielle Funktion aus $\mathcal{L}_0$ ist $q := i^2$. Da $\mathcal{M}$ nach Theorem 4 $\mathcal{L}_0$ -stabil ist, liegt mit f und g auch $q \circ (f+g) = (f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ sowie $q \circ f = f^2$ und $q \circ g = g^2$ in $\mathcal{M}$. Dann aber liegt $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$ ebenfalls in $\mathcal{M}$.

Vom Satz 16 gilt auch die Umkehrung²⁾, die wir mit unseren Methoden jedoch nicht beweisen können.

1) Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^E$ heißt eine Algebra, wenn $\mathcal{A}$ bezüglich folgender Operationen stabil ist:

(1) $(f, g) \longrightarrow \alpha f + \beta g, \quad f, g \in \mathcal{A}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 (2) $(f, g) \longrightarrow fg, \quad f, g \in \mathcal{A}.$

Dabei ist $fg(x) := f(x)g(x) \quad (x \in E).$

2) [15], Satz 2 oder [13], Lemma 4 D.

Kapitel II

Die in Kapitel I, § 1, Beispiel 5 definierte Menge $\mathcal{T}$ kann innerhalb der Menge aller auf $\mathbb{R}^+$ stetigen Funktionen auf folgende Weise durch "Integralmittel" charakterisiert werden¹⁾:

Wie üblich bezeichne ϵ_α das Maß mit der auf den Punkt α konzentrierten Gesamtmasse 1 und weiter sei

$$\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} := \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \epsilon_\alpha + \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \epsilon_\gamma \quad \text{für } 0 \leq \alpha < \beta < \gamma$$

$$\text{und } \sigma_{\alpha,\beta,\gamma} := \epsilon_\alpha \quad \text{für } 0 \leq \alpha < \beta = \gamma.$$

Dann gelten genau für die Funktionen k aus $\mathcal{T}$ die Beziehungen

$$(1) \quad \int k d\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} \leq k(\beta) \quad \text{für alle } \alpha, \beta, \gamma \text{ mit } 0 \leq \alpha < \beta \leq \gamma$$

$$\text{und } (2) \quad \int k d\epsilon_0 = 0.$$

Die Ungleichungen (1) besagen nämlich, daß $\mathcal{T}$ nur wachsende, konkave Funktionen enthält, während aus (2) folgt, daß sämtliche Funktionen aus $\mathcal{T}$ im Nullpunkt verschwinden. In der Tat, es ist $\int k d\epsilon_0 = k(0)$, gemäß (2) also $k(0) = 0$ für alle $k \in \mathcal{T}$ und für jedes Tripel α, β, γ mit $0 \leq \alpha < \beta = \gamma$ ist $\int k d\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} = k(\alpha)$, also $k(\alpha) \leq k(\beta)$ für alle $k \in \mathcal{T}$, gemäß (1). Für jedes Tripel α, β, γ mit $0 \leq \alpha < \beta < \gamma$ ist

$$\int k d\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} k(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} k(\gamma) = a_{\mathbb{R}^+}[k; \alpha, \gamma](\beta) \quad 2),$$

wegen (1) gilt dann also $a_{\mathbb{R}^+}[k; \alpha, \gamma](\beta) \leq k(\beta)$ für alle $k \in \mathcal{T}$, was aber nichts anderes bedeutet, als daß k auf $\mathbb{R}^+$ konkav ist.

Für jedes Tripel α, β, γ mit $0 \leq \alpha < \beta \leq \gamma$ ist

$$\int d\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} + \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = 1$$

und ebenso ist $\int d\epsilon_0 = 1$. Da der Nullpunkt und auch jede dreipunktige Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^+$ sind, können wir unser obiges Resultat etwas abstrakter wie folgt formulieren (I und J seien zwei Indexmengen):

Es gibt erstens eine Familie F_1 von Paaren (x_v, σ_v) , $v \in I$, wobei x_v ein Punkt aus $\mathbb{R}^+$ und σ_v ein von einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ getragenes positives Radonsches Maß mit der Gesamtmasse 1 ist, das den Punkt x_v nicht mit Masse belegt, und zweitens eine Familie F_2 von positiven Radonschen Maßen τ_μ , $\mu \in J$,

1) vergleiche auch [16], chap. II

2) Kapitel 0, Definition 3

wobei jedes τ_μ von einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ getragen wird und die Gesamtmasse 1 hat derart, daß die Funktionen aus $\mathcal{F}$ genau die stetigen Funktionen k auf $\mathbb{R}^+$ sind mit:

$$(1) \quad \int k d\sigma_v \leq k(x_v) \quad \text{für alle } v \in I,$$

$$(2) \quad \int k d\tau_\mu = 0 \quad \text{für alle } \mu \in J.$$

Wir wollen im folgenden zeigen, daß jede bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene, konvexe Menge stetiger, reeller, nicht-negativer, auf einem Hausdorff-Raum definierter Funktionen, die entweder ein der (S)-Bedingung genügender inf-Kegel oder ein der (T)-Bedingung genügender sup-Kegel ist, eine ganz ähnliche Charakterisierung durch "Integralmittel" zuläßt. Dabei stützen wir uns wesentlich auf eine Arbeit von G. Choquet und J. Deny ([9]), deren Hauptresultat wir im nächsten Paragraphen skizzieren werden.

In diesem Kapitel bezeichne X einen Hausdorff-Raum, K einen kompakten Raum und $\mathcal{L}(X)$ beziehungsweise $\mathcal{L}^+(X)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X in $\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{R}^+$. $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}^+(X)$ seien stets mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen. Ist $f \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(X)$ und A eine Teilmenge von X , so bezeichnet f_A die Einschränkung von f auf A , $\mathcal{M}_A$ bezeichnet die Menge der auf A eingeschränkten Funktionen aus $\mathcal{M}$ und $\overline{\mathcal{M}}_A$ die bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossene Hülle von $\mathcal{M}_A$.

A

§ 1

Maßtheoretische Charakterisierung konvexer inf- und sup-Kegel aus $\mathcal{L}(X)$

Definition 1: I und J seien zwei Indexmengen. F_1 sei eine Familie von Paaren (x_v, σ_v) ($v \in I$), wobei x_v ein Punkt aus X und σ_v ein positives, von einer kompakten Teilmenge von X getragenes Radonsches Maß ist¹⁾. F_2 sei eine Familie positiver Radonscher Maße τ_μ ($\mu \in J$), die von kompakten Teilmengen von X getragen werden. Die Menge $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(X)$ heißt den beiden Familien F_1 und F_2 1 - assoziiert, wenn die Funktionen aus $\mathcal{K}$ genau die

1) Kapitel 0, § 1

auf X stetigen Funktionen u sind mit:

$$(1) \quad \int u d\sigma_v \leq u(x_v) \quad \text{für alle } v \in I,$$

$$(2) \quad \int u d\tau_\mu \leq 0 \quad \text{für alle } \mu \in J.$$

$\mathcal{K}$ heißt den Familien F_1 und F_2 s -assoziert, wenn die Funktionen aus $\mathcal{K}$ genau die auf X stetigen Funktionen u sind, für die die zu (1) und (2) dualen Ungleichungen gelten.

Wie auch die Familien F_1, F_2 vorgegeben sind, immer ist die Menge aller $u \in \mathcal{L}(X)$, welche (1) und (2) erfüllen, ein abgeschlossener, konvexer inf-Kegel und entsprechend die Menge aller $w \in \mathcal{L}(X)$, die die zu (1) und (2) dualen Ungleichungen erfüllen, ein abgeschlossener, konvexer sup-Kegel.¹⁾ Wesentlich ist für uns, daß davon auch die Umkehrung gilt²⁾:

Satz 1: Jeder abgeschlossene, konvexe inf-Kegel (sup-Kegel) aus $\mathcal{L}(X)$ ist die zwei geeigneten Familien F_1, F_2 i -assozierte (s -assozierte) Menge.

§ 2

Maßtheoretische Charakterisierung der (S)-Bedingung

Definition 2: Ist $\mathcal{Q}$ eine Menge auf X reeller Funktionen, so bedeutet $N(\mathcal{Q})$ die Menge aller $x \in X$, in denen sämtliche Funktionen aus $\mathcal{Q}$ verschwinden.

Lemma 1: Sei $\mathcal{K}$ ein konvexer Kegel aus $\mathcal{L}^+(K)$ und $N(\mathcal{K})$ sei leer. Dann existiert ein $u \in \mathcal{K}$ mit $u \geq 1$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert zu jedem $x \in K$ ein $u_x \in \mathcal{K}$ mit $u_x(x) > 0$, und es ist $U_x := \{y; y \in K, u_x(y) > 0\}$ offen. Wegen der Kompaktheit von K gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n$ aus K derart, daß die Mengen U_{x_v} ($v=1, \dots, n$) K überdecken. Die zugehörigen Funktionen $u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$ haben dann folgende Eigenschaft: Es existiert zu jedem

1) Kapitel I, § 1, Beispiel 4a und Kapitel I, § 6, Beispiel 4a

2) [9], Théorème 1

$y \in K$ mindestens ein v mit $1 \leq v \leq n$ so, daß $u_{x_v}(y) > 0$ ist. Folglich ist $u' := u_1 + \dots + u_n > 0$ auf K . Da u' als stetige Funktion auf K ihr Minimum β annimmt, leistet die Funktion $u := \beta^{-1} u'$ das Verlangte.

Aus Lemma 1 ergibt sich unmittelbar das

Lemma 2: Ist $\mathcal{K}$ ein konvexer, der (S)-Bedingung genügender Kegel aus $\mathcal{L}^+(K)$ und ist $N(\mathcal{K})$ leer, so enthält $\mathcal{K}$ die positiven Konstanten.

Lemma 3: $\mathcal{K}$ sei ein abgeschlossener, konvexer inf-Kegel aus $\mathcal{L}(K)$ mit $1 \in \mathcal{K}$. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathcal{K}$ einen Punkt $x_f \in K$ und ein positives Radonsches Maß σ_f auf K mit $\int d\sigma_f \leq 1$ so, daß

$$\int f d\sigma_f > f(x_f),$$

$$\int u d\sigma_f \leq u(x_f) \quad \text{ist für alle } u \in \mathcal{K}.$$

Beweis: Nach [9], Lemme 2 existiert entweder ein Punkt $x_f \in K$ und ein positives Radonsches Maß σ_f auf K mit

$$(1) \quad \begin{aligned} \int f d\sigma_f &> f(x_f), \\ \int u d\sigma_f &\leq u(x_f) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{K}, \end{aligned}$$

oder ein positives Radonsches Maß τ_f auf K mit

$$(2) \quad \begin{aligned} \int f d\tau_f &> 0, \\ \int u d\tau_f &\leq 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Wegen $1 \in \mathcal{K}$ kann (2) jedoch nicht eintreten. Es genügt zu zeigen, daß σ_f eine Gesamtmasse ≤ 1 hat. Das ist aber wegen $1 \in \mathcal{K}$ trivial, da dann $\int 1 d\sigma_f = \int d\sigma_f \leq 1$ ist.

Lemma 4: Es sei $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener, konvexer inf-Kegel aus $\mathcal{L}^+(K)$. Jede Funktion $f \in \mathcal{L}^+(K)$, die auf $N(\mathcal{K})$ verschwindet und auf jeder kompakten Teilmenge aus $\mathcal{L}^+(K)$ gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathcal{K}$ approximierbar ist, liegt in $\mathcal{K}$.

Beweis: Seien ein $\epsilon > 0$ und eine den obengenannten Bedingungen genügende Funktion f vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von f auf K ist dann $V := \{x \in K; f(x) < \epsilon\}$ offen, und da f auf $N(\mathcal{K})$ verschwindet, liegt $N(\mathcal{K})$ in V . Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K ist $\overline{V}$ selbst kompakt. Da f auf K beschränkt und $\overline{V} \cap N(\mathcal{K})$ leer ist, existiert nach Lemma 1 ein $u \in \mathcal{K}$ mit $u(x) \geq f(x)$ für alle $x \in \overline{V}$.

Die Funktion v ist auf X stetig und verschwindet auf $N(\mathcal{K})$. Folglich ist $V := \{x \in X: w(x) < \varepsilon\}$ offen und $\bar{V} \cap N(\mathcal{K})$ leer. Somit gelten für alle $x \in V \cap V$ die Ungleichungen

$$0 \leq u(x) < \varepsilon, \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon,$$

es ist $w(x) - f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in V \cap V$. Da $\bar{V} \cap V$ kompakt und zu $N(\mathcal{K})$ fremd ist, existiert nach Voraussetzung ein $v \in \mathcal{K}$ derart, daß für alle $x \in \bar{V} \cap V$ gilt $w(x) - f(x) < \varepsilon$.

Wendes wir $w := \inf(u, v)$, so gilt für alle $x \in X$ die Beziehung $w(x) - f(x) < \varepsilon$. In der Tat: Für jedes $x \in V \cap V$ mit $w(x) = u(x)$ folgt $w(x) - f(x) < \varepsilon$ gemäß obiger Bemerkung und falls $w(x) = v(x)$ ist, gilt $0 \leq v(x) \leq u(x) < \varepsilon$, was wegen $0 \leq f(x) < \varepsilon$ ebenfalls $w(x) - f(x) < \varepsilon$ zur Folge hat. Ist also $x \in \bar{V} \cap V = \bar{V} \cap V$. Für $x \in \bar{V}$ ist $w(x) \leq f(x)$ und $v(x) - f(x) < \varepsilon$, jedenfalls also $w(x) - f(x) < \varepsilon$. Liegt x in $\bar{V} \cap V$, so hat der Fall $w(x) = v(x)$ trivial. Ist $w(x) = u(x)$, so gilt entweder $f(x) \leq u(x) \leq v(x)$ oder $u(x) \leq f(x)$ und $u(x) \leq v(x)$, was im ersten Fall wegen $v(x) - f(x) < \varepsilon$ und im zweiten Fall wegen $0 \leq f(x) < \varepsilon$ die Beziehung $w(x) - f(x) < \varepsilon$ nach sich zieht.

Da ε eine beliebige positive reelle Zahl war und $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener Inf-Kegel ist, liegt f in $\mathcal{K}$.

Satz 2: Es sei X ein Hausdorff-Raum und $\mathcal{K}$ sei ein abgeschlossener, konvexer Inf-Kegel aus $\mathcal{L}^+(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Es gibt zwei Familien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$, deren $\mathcal{K}$ 1-assoziiert ist und in denen nur Maße mit einer Gesamtmasse ≤ 1 auftreten;
- (2) $\mathcal{K}$ genügt der (S)-Bedingung.

Beweis: (1) $\implies$ (2):

Es sei $\mathcal{F}_1 = \{\mu_\nu, \nu \in I\}$ und $\mathcal{F}_2 = \{\mu_\rho, \rho \in J\}$. Für jedes $\nu \in \mathcal{K}$ gelten nach Voraussetzung die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \int u d\mu_\nu &\leq u(x_\nu) && \text{für alle } \nu \in I \text{ und} \\ \int u d\mu_\rho &\leq 0 && \text{für alle } \rho \in J. \end{aligned}$$

Aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \int \inf(1, u) d\sigma_v &\leq \int u d\sigma_v \leq u(x_v) \\ \int \inf(1, u) d\sigma_v &\leq \int d\sigma_v \leq 1 \end{aligned} \quad (u \in \mathcal{K}; v \in I)$$

folgt aber unmittelbar die Beziehung

$$\int \inf(1, u) d\sigma_v \leq \inf(1, u(x_v)) \quad (u \in \mathcal{K}; v \in I)$$

und außerdem ist

$$\int \inf(1, u) d\tau_\mu \leq \int u d\tau_\mu = 0 \quad (u \in \mathcal{K}; \mu \in J).$$

Somit liegt $\inf(1, u)$ in $\mathcal{K}$.

(2) $\implies$ (1):

Es sei $f \in \mathcal{L}(X) \cap \int \mathcal{L}^+(X)$. Dann existiert ein $x_f \in X$ mit $f(x_f) < 0$.

Setzen wir $\sigma_f := 0$ (Nullmaß), so gilt

$$\begin{aligned} \int f d\sigma_f &> f(x_f), \\ \int u d\sigma_f &\leq u(x_f) \end{aligned} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{K}, \text{ da } \mathcal{K} \text{ in } \mathcal{L}^+(X) \text{ liegt,}$$

und es ist σ_f ein von einer kompakten Teilmenge von X getragenes positives Radonsches Maß mit $\int d\sigma_f = 0 \leq 1$.

Nun sei $f \in \mathcal{L}^+(X) \cap \int \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossen ist, existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ derart, daß f_K nicht in $\overline{\mathcal{K}_K}$ liegt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- (a) Es existiert ein Punkt $x_f \in N(\mathcal{K})$ mit $f(x_f) \neq 0$. Wegen $f \in \mathcal{L}^+(X)$ ist dann $f(x_f) > 0$. In diesem Falle ist das "Punktmaß" $\tau_f = \epsilon_{x_f}$ ein positives Radonsches Maß auf dem Kompaktum $\{x_f\}$ mit der Gesamtmasse 1 und mit

$$\begin{aligned} \int f d\tau_f &= f(x_f) > 0 \quad \text{und} \\ \int u d\tau_f &= u(x_f) \leq 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

- (b) f verschwindet auf $N(\mathcal{K})$. Nach Lemma 4 existiert dann aber ein Kompaktum $K_0 \subset K \cap \int N(\mathcal{K})$ mit $f_{K_0} \notin \overline{\mathcal{K}_{K_0}}$. Die Menge $\overline{\mathcal{K}_{K_0}}$ genügt dann wegen Lemma 2 allen Voraussetzungen von Lemma 3. Daher existiert zu dem vorgegebenen f ein Punkt $x_f \in K_0$ und ein positives Radonsches Maß σ_f auf K_0 mit $\int d\sigma_f \leq 1$ so, daß

$$\begin{aligned} \int f d\sigma_f &= \int f_{K_0} d\sigma_f > f(x_f) \quad \text{und} \\ \int u d\sigma_f &= \int u_{K_0} d\sigma_f \leq u(x_f) \quad \text{ist für alle } u \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Die Familien

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &:= (x_f, \sigma_f) \quad (f \in \mathcal{L}(X) \cap \int \mathcal{L}^+(X), f(x_f) < 0 \quad \text{und} \\ &\quad f \in \mathcal{L}^+(X) \cap \int \mathcal{K}, f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in N(\mathcal{K})) \\ \text{und} \quad \mathcal{F}_2 &:= (\tau_f) \quad (f \in \mathcal{L}^+(X) \cap \int \mathcal{K}, f(x_f) \neq 0 \quad \text{für ein } x_f \in N(\mathcal{K})) \end{aligned}$$

leisten somit das Verlangte.

Maßtheoretische Charakterisierung der (T)-Bedingung

Lemma 5: Ist $\mathcal{U}$ ein konvexer, der (T)-Bedingung genügender sup-Kegel aus $\mathcal{L}^+(X)$, so ist $\mathcal{U}^- := \bigcup_{\alpha \geq 0} (\mathcal{U} - \alpha)$ ¹⁾ ein konvexer sup-Kegel aus $\mathcal{L}(X)$.

Beweis: Es seien u und v aus $\mathcal{U}$; α, β und γ seien aus $\mathbb{R}^+$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha \leq \beta$. Dann ist

- (1) $\gamma(u-\alpha) = \gamma u - \gamma\alpha \in \mathcal{U}^-$, da $\mathcal{U}$ ein Kegel und $\gamma\alpha \geq 0$ ist;
- (2) $(u-\alpha) + (v-\beta) = (u+v) - (\alpha+\beta) \in \mathcal{U}^-$, da $\mathcal{U}$ konvex und $\alpha+\beta \geq 0$ ist;
- (3) $\sup(u-\alpha, v-\beta) = \sup(u, v - (\beta-\alpha)) - \alpha = \sup(u, \sup(0, v - (\beta-\alpha))) - \alpha \in \mathcal{U}^-$;
denn nach Voraussetzung ist $\alpha \leq \beta$, $u \geq 0$ und $\mathcal{U}$ ein der (T)-Bedingung genügender sup-Kegel.

Also ist $\mathcal{U}^-$ ein konvexer sup-Kegel aus $\mathcal{L}(X)$.

Im folgenden bezeichnen wir für $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{B}_\varepsilon$ die Menge aller Funktionen b aus $\mathcal{L}(X)$ mit $|b| < \varepsilon$.

Lemma 6: Es sei $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener, der (T)-Bedingung genügender sup-Kegel aus $\mathcal{L}^+(K)$ und weiter sei $f \in \mathcal{L}^+(K) \cap \bigcap \mathcal{U}$. Dann liegt f nicht in der abgeschlossenen Hülle von $\mathcal{U}^- := \bigcup_{\alpha \geq 0} (\mathcal{U} - \alpha)$.

Beweis: Sei ein $f \in \mathcal{L}^+(K) \cap \bigcap \mathcal{U}$ vorgegeben. Die Mengen

$$\mathcal{A}(\varepsilon) := \{f\} + \mathcal{B}_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

sind offen. Zu zeigen ist, daß eine dieser Mengen fremd ist zu $\mathcal{U}^-$.

Wir machen die folgende Annahme: Kein $\mathcal{A}(\varepsilon)$ ist fremd zu $\mathcal{U}^-$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $b_\varepsilon \in \mathcal{B}_\varepsilon$ derart, daß gilt:

$$f + b_\varepsilon \in \mathcal{U}^-.$$

Das aber heißt, es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\alpha \geq 0$ und ein $b_\varepsilon \in \mathcal{B}_\varepsilon$ mit

$$f + \alpha + b_\varepsilon \in \mathcal{U}.$$

Da $\mathcal{U}$ der (T)-Bedingung genügt, liegt auch die Funktion

$$\sup(0, f + \alpha + b_\varepsilon - \alpha) = \sup(0, f + b_\varepsilon)$$

in $\mathcal{U}$. Somit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $b_\varepsilon \in \mathcal{B}_\varepsilon$ derart, daß gilt

$$\sup(0, f + b_\varepsilon) \in \mathcal{U}.$$

1) Für jedes vorgegebene $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{U} - \alpha := \{u - \alpha; u \in \mathcal{U}\}.$

Da f nicht-negativ ist, gilt also

$$-\varepsilon \leq \sup(0, f) - \sup(0, f+b_\varepsilon) = f - \sup(0, f+b_\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

und da ε beliebig klein gewählt werden kann und $\mathcal{U}$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossen ist, ergibt sich, daß f in $\mathcal{U}$ liegt, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lemma 7: $\mathcal{U}$ sei ein abgeschlossener, konvexer, der (T)-Bedingung genügender sup-Kegel aus $\mathcal{L}^+(K)$. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathcal{L}^+(K) \cap \mathcal{U}$ einen Punkt $x_f \in K$ und ein positives Radonsches Maß σ_f auf K mit $\int d\sigma_f \leq 1$ so, daß

$$\int f d\sigma_f < f(x_f),$$

$$\int u d\sigma_f \geq u(x_f) \quad \text{ist für alle } u \in \mathcal{U}.$$

Beweis: Sei ein $f \in \mathcal{L}^+(K) \cap \mathcal{U}$ vorgegeben. Nach Lemma 6 liegt dann f auch nicht in der abgeschlossenen Hülle von $\mathcal{U}^- := \bigcup_{\alpha \geq 0} (\mathcal{U} - \alpha)$. Da $\mathcal{U}^-$ nach Lemma 5 ein konvexer sup-Kegel ist, liegt f also nicht in dem abgeschlossenen, konvexen sup-Kegel $\overline{\mathcal{U}^-}$. Daher gibt es nach [9], Théorème 1 entweder einen Punkt $x_f \in K$ und ein auf K positives Radonsches Maß σ_f mit

$$(1) \quad \int f d\sigma_f < f(x_f),$$

$$\int u d\sigma_f \geq u(x_f) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}^-$$

oder aber ein auf K positives Radonsches Maß τ_f mit

$$(2) \quad \int f d\tau_f < 0,$$

$$\int u d\tau_f \geq 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}^-.$$

Wegen $f \in \mathcal{L}^+(K)$ kann (2) jedoch nicht eintreten. Wenn wir nachweisen können, daß das in (1) auftretende positive Radonsches Maß σ_f eine Gesamtmasse ≤ 1 hat, sind wir wegen $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^-$ fertig. Das aber ergibt sich auf Grund der Struktur von $\mathcal{U}^-$ sofort. $\mathcal{U}^-$ enthält nämlich insbesondere die Funktion $0-1$, so daß wegen (1) gilt

$$\int (0-1) d\sigma_f = -\int d\sigma_f \geq -1, \text{ also } \int d\sigma_f \leq 1.$$

Satz 3: $\mathcal{U}$ sei ein abgeschlossener, konvexer sup-Kegel aus $\mathcal{L}^+(X)$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(1) Es gibt zwei Familien F_1 und F_2 , denen $\mathcal{U}$ s-assoziert ist und in denen nur Maße mit einer Gesamtmasse ≤ 1 auftreten;

(2) $\mathcal{U}$ genügt der (T)-Bedingung.

Beweis: (1) $\implies$ (2):

Es sei $F_1 = ((x_v, \sigma_v))_{v \in I}$ und $F_2 = (\tau_\mu)_{\mu \in J}$.

Für jedes $u \in \mathcal{U}$ gilt dann

$$\int \sup(0, u-1) d\sigma_v \geq \sup(0, \int u d\sigma_v - \int d\sigma_v) \geq \sup(0, u(x_v) - 1) \text{ für alle } v \in I$$

da nach Voraussetzung für jedes $u \in \mathcal{U}$ und jedes $v \in I$ gilt

$$\int u d\sigma_v \geq u(x_v) \text{ und da } \int d\sigma_v \leq 1 \text{ ist für alle } v \in I.$$

Weiter gilt für jedes $u \in \mathcal{U}$ und jedes $\mu \in J$ die Beziehung

$$\int \sup(0, u-1) d\tau_\mu \geq 0, \text{ da für alle } \mu \in J \text{ das Radonsche Maß } \tau_\mu$$

positiv ist. Somit gilt für jedes $u \in \mathcal{U}$ die Beziehung

$$\sup(0, u-1) \in \mathcal{U}, \text{ das heißt, } \mathcal{U} \text{ genügt der (T)-Bedingung.}$$

(2) $\implies$ (1):

Es sei $f \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}^+(X)$. Dann existiert ein $x_f \in X$ mit $f(x_f) < 0$.

Setzen wir $\tau_f := \varepsilon_{x_f}$, so gilt

$$\int f d\tau_f < 0 \text{ und}$$

$$\int u d\tau_f \geq 0 \text{ für alle } u \in \mathcal{U}, \text{ da } \mathcal{U} \text{ in } \mathcal{L}^+(X) \text{ liegt,}$$

und es ist überdies

$$\int d\tau_f = 1.$$

Nun sei ein $f \in \mathcal{L}^+(X) \cap \int \mathcal{U}$ vorgegeben. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ derart, daß f_K nicht in $\overline{\mathcal{U}_K}$ liegt. Nach Lemma 7 gibt es daher einen Punkt $x_f \in K$ und ein positives Radonsches Maß σ_f auf K mit $\int d\sigma_f \leq 1$ derart, daß gilt

$$\int f d\sigma_f = \int f_K d\sigma_f < f(x_f) \text{ und}$$

$$\int u d\sigma_f \geq \int u_K d\sigma_f \geq u(x_f) \text{ für alle } u \in \mathcal{U}.$$

Somit leisten die Familien

$$F_1 = (x_f, \sigma_f) \quad (f \in \mathcal{L}^+(X) \cap \int \mathcal{U}) \text{ und}$$

$$F_2 = (\tau_f) \quad (f \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}^+(X))$$

das Verlangte.

Ein Kompaktifizierungssatz

In diesem Abschnitt wollen wir die Theoreme 1 und 2 des ersten Kapitels auf topologisch-maßtheoretischem Wege gewinnen. Um dazu die Resultate des Teiles A anwenden zu können, muß die Menge E , der Definitionsbereich der in den Theoremen 1 und 2 des Kapitels I betrachteten Funktionen, so in einen topologischen Raum $\hat{E}$ eingebettet werden, daß erstens alle Funktionen der in Theorem 1 beziehungsweise Theorem 2 betrachteten Funktionenmenge zu auf $\hat{E}$ stetigen Funktionen fortgesetzt werden können, und daß zweitens die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz übereinstimmt mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Das soll in diesem Paragraphen geschehen.

Lemma 8: Es sei $\mathcal{f}$ eine Menge beschränkter Funktionen aus $\mathbb{R}^E$ und $\mathcal{f}$ trenne die Punkte von E . Dann existiert ein kompakter Raum $\hat{E}$ so, daß gilt:

- (1) E liegt überall dicht in $\hat{E}$;
- (2) zu jeder Funktion $f \in \mathcal{f}$ gibt es genau eine auf $\hat{E}$ stetige Funktion $\hat{f}$ derart, daß f und $\hat{f}$ auf E übereinstimmen.

Beweis: Jede Funktion $f \in \mathcal{f}$ definiert auf E die folgende Quasi-Metrik δ_f :

$$\delta_f(x, y) := |f(x) - f(y)| \quad (x, y \in E).$$

Die Familie $(\delta_f)_{f \in \mathcal{f}}$ definiert in E eine uniforme Struktur $\mathcal{U}$ ¹⁾, und zwar ist $\mathcal{U}$ die größte unter allen uniformen Strukturen in E , in bezug auf welche die Funktionen aus $\mathcal{f}$ gleichmäßig stetig sind. E sei der so erhaltene uniforme Raum²⁾. $\mathcal{U}$ ist separiert, da $\mathcal{f}$ die Punkte von E trennt. Aus $\delta_f(x, y) < \epsilon$ für ein Paar $x, y \in E$, alle $f \in \mathcal{f}$ und jedes $\epsilon > 0$ folgt nämlich $x = y$. $\mathcal{U}$ ist außerdem präkompakt³⁾. Sei nämlich V eine Nachbarschaft von $\mathcal{U}$. Gemäß der Definition von $\mathcal{U}$ existieren dann ein $\epsilon > 0$ und endlich viele Funktionen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{f}$ derart, daß $\{(x, y); \delta_{f_v}(x, y) < \epsilon, v=1, \dots, n\} \subset V$ ⁴⁾

1) [5], § 1.2, Definition 3

2) [3], chap. II, § 2.1

3) [3], chap. II, § 4.2

4) [3], chap. II, p. 171

ist. Zu jedem $x_{\mu} \in E'$ definieren wir $A_v(x_{\mu}) := \{x; |f_v(x) - f_v(x_{\mu})| < \frac{\varepsilon}{2}\}$
 $(v=1, \dots, n)$ und $A(x_{\mu}) := \bigcap_{v=1}^n A_v(x_{\mu})$. Dann gilt $|f_v(x) - f_v(y)| < \varepsilon$
für jedes Paar $x, y \in A(x_{\mu})$ und jedes $v=1, \dots, n$. Da jedes f_v
 $(v=1, \dots, n)$ beschränkt ist, gibt es endlich viele, E' überdeckende
Mengen $A(x_1), \dots, A(x_m)$ derart, daß $|f_v(x) - f_v(y)| < \varepsilon$ ist für
jedes Paar $x, y \in A(x_{\mu})$ ($\mu=1, \dots, m; v=1, \dots, n$), das heißt, jedes
 $A(x_{\mu})$ ($\mu=1, \dots, m$) ist klein von der Ordnung V ; also ist $\mathbb{U}$
präkompakt. Folglich ist die Kompletterung $\hat{E}$ von E' bezüglich
 $\mathbb{U}$ ¹⁾ kompakt ²⁾ und E' ist ein in $\hat{E}$ überall dicht gelegener Unter-
raum von $\hat{E}$. Es ist auf Grund von [3], chap. II, § 3.4, Théorème 1
klar, daß es zu jedem $f \in \mathcal{F}$ genau eine auf $\hat{E}$ stetige Funktion $\hat{f}$
gibt, die auf E mit f übereinstimmt. ³⁾

¹⁾ [3], chap. II, § 3.5

²⁾ [3], chap. II, § 4.2 oder [11], p. 198

³⁾ Man hätte Lemma 8 auch folgendermaßen beweisen können:
 $\mathbb{U}$ sei die durch die Quasi-Metriken

$$\Delta_f(x, y) := |f(x) - f(y)| \quad (x, y \in E; f \in \mathcal{F})$$

definierte uniforme Struktur $\mathbb{U}$ in E . E' sei der so erhaltene uniforme
Raum. $\mathbb{U}$ ist unter allen uniformen Strukturen von E die größte, hin-
sichtlich der alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ gleichmäßig stetig sind. E' ist
ein separierter Raum; denn $\mathcal{F}$ trennt die Punkte von E . E' ist sogar
vollständig regulär ([14], S. 193). Folglich besitzt E' eine Čechsche
Erweiterung $\hat{E}$ ([14], S. 161), die das Gewünschte leistet ([14], 18.9,
S. 161).

Bemerkung: Es sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^E$ und $\mathcal{M}$ sei stabil bezüglich einer Teilmenge A der in $\mathbb{R}^E$ erklärten Operationen $(f, g \in \mathbb{R}^E) : f \longrightarrow \alpha f$ (α reell), $f \longrightarrow \alpha f$ ($\alpha \geq 0$), $(f, g) \longrightarrow f + g$, $(f, g) \longrightarrow \inf(f, g)$, $(f, g) \longrightarrow \sup(f, g)$, $f \longrightarrow \inf(1, f)$, $f \longrightarrow \sup(0, f-1)$. Dann ist es für die Untersuchung der Frage, welche Funktionen auf E gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathcal{M}$ approximiert werden können, belanglos, ob $\mathcal{M}$ die Punkte von E trennt oder nicht. Um dies zu zeigen, sei $R_{\mathcal{M}}$ die folgende Äquivalenzrelation in E : Für $x, y \in E$ gilt $R_{\mathcal{M}}(x, y)$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ ist für alle $f \in \mathcal{M}$. Ferner sei

$$E_{\mathcal{M}} = \frac{E}{R_{\mathcal{M}}}$$

und k die kanonische Abbildung von E in $E_{\mathcal{M}}$:

$$k : E \longrightarrow E_{\mathcal{M}}.$$

Offenbar gibt es zu jedem $f \in \mathcal{M}$ eine auf $E_{\mathcal{M}}$ reelle, beschränkte Funktion f' mit $f = f' \circ k$. $\mathcal{M}'$ sei die Menge aller dieser Funktionen f' . Dann trennt offenbar $\mathcal{M}'$ die Punkte von $E_{\mathcal{M}}$ und $\mathcal{M}'$ ist, wie man sofort erkennt, bezüglich jeder Operation aus A stabil. Kann eine Funktion u' auf $E_{\mathcal{M}}$ gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathcal{M}'$ approximiert werden, so kann die Funktion $u = u' \circ k$ auf E gleichmäßig approximiert werden durch Funktionen aus $\mathcal{M}$, da jede Funktion aus $\mathcal{M}$ auf jeder $R_{\mathcal{M}}$ -Äquivalenzklasse von E konstant ist. Es bedeutet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im folgenden bei allen Mengen aus $\mathbb{R}^E$ voraussetzen, daß sie die Punkte von E trennen (siehe auch [3], chap. II, § 1.4).

§ 5

Beweis des Theorems 1 aus Kapitel I mit maßtheoretischen Hilfsmitteln

Theorem 1: Jeder bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene, konvexe, der (S) - Bedingung genügende inf - Kegel $\mathcal{K}$ beschränkter, nicht - negativer Funktionen aus $\mathbb{R}^E$ ist γ - stabil.¹⁾

1) Nur diese schwächere Form von Kapitel I, Theorem 1 ist mit maßtheoretischen Hilfsmitteln allein beweisbar.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\mathcal{K}$ die Punkte von E trennt. Dann aber garantiert Lemma 8 die Existenz eines kompakten Raumes $\hat{E}$, in dem E überall dicht liegt und auf den jedes $u \in \mathcal{K}$ auf genau eine Weise zu einer auf $\hat{E}$ stetigen Funktion $\hat{u}$ fortgesetzt werden kann. Die Menge $\hat{\mathcal{K}}$ dieser Fortsetzungen $\hat{u}$ ist dann ein bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossener, konvexer, der (S)-Bedingung genügender inf-Kegel beschränkter, nicht-negativer Funktionen aus $\mathbb{R}^{\hat{E}}$. Folglich gibt es nach Satz 2 zwei Familien $F_1 = ((\hat{x}_v, \sigma_v))_{v \in I}$ und $F_2 = (\tau_\mu)_{\mu \in J}$, denen $\hat{\mathcal{K}}$ 1-assoziiert ist (Definition 1) und in denen nur positive Radonsche Maße mit einer Gesamtmasse ≤ 1 auftreten.

Nun seien ein $k \in \mathcal{T}$ und ein $u \in \mathcal{K}$ vorgegeben. Wegen der Konkavität von k (ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $k \neq 0$ angenommen werden) ist die Menge $\{(\alpha, \beta); 0 \leq \alpha < \infty, 0 \leq \beta \leq k(\alpha)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein konvexer Körper in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, so daß nach [7], p. 72 oder [12], § 17.5 zu jedem Punkt $(\hat{u}(\hat{x}_v), k \circ \hat{u}(\hat{x}_v))$, $v \in I$, eine auf $\mathbb{R}^+$ affin-lineare Funktion s_v existiert mit $s_v \geq k$ und $s_v \circ \hat{u}(\hat{x}_v) = k \circ \hat{u}(\hat{x}_v)$.¹⁾ Wegen $k(0) = 0$, wegen der Monotonie und wegen der Konkavität von k ist jedes s_v von der Gestalt $s_v = \alpha_v i_+ + \beta_v$ mit $\alpha_v, \beta_v \in \mathbb{R}^+$ ($v \in I$). Daher gilt für jedes $v \in I$ die Beziehung

$$\int k \circ \hat{u} d\sigma_v \leq \int s_v \circ \hat{u} d\sigma_v = \alpha_v \int \hat{u} d\sigma_v + \beta_v \int d\sigma_v,$$

woraus wegen $\int \hat{u} d\sigma_v \leq \hat{u}(\hat{x}_v)$, $\int d\sigma_v \leq 1$ und $\alpha_v, \beta_v \in \mathbb{R}^+$ ($v \in I$) folgt

$$\int k \circ \hat{u} d\sigma_v \leq \alpha_v \hat{u}(\hat{x}_v) + \beta_v = s_v \circ \hat{u}(\hat{x}_v) = k \circ \hat{u}(\hat{x}_v).$$

Wegen $k(0) = 0$, wegen der Stetigkeit und wegen der Monotonie von k existiert zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\beta > 0$ derart, daß gilt $k(\beta) > 0$ und $0 \leq k(\alpha) \leq \varepsilon$ für alle $\alpha \in [0, \beta]$. Setzen wir $\gamma := \frac{k(\beta)}{\beta}$, so folgt aus der Konkavität von k

$$k(\alpha) \geq \gamma i_+(\alpha) \quad \text{für alle } \alpha \in [0, \beta] \quad \text{und} \quad k(\alpha) \leq \gamma i_+(\alpha) \quad \text{für alle } \alpha \geq \beta,$$

so daß also gilt $k < \gamma i_+ + 2\varepsilon$. Somit ist

$$\int k \circ \hat{u} d\tau_\mu \leq \gamma \int \hat{u} d\tau_\mu + 2\varepsilon \int d\tau_\mu \leq 2\varepsilon \quad \text{für alle } \mu \in J.$$

Da ε eine beliebige positive reelle Zahl war und da außerdem für alle $\mu \in J$ gilt $0 \leq \int k \circ \hat{u} d\tau_\mu$, ergibt sich $\int k \circ \hat{u} d\tau_\mu = 0$ für alle $\mu \in J$. Also liegt $k \circ \hat{u}$ in $\hat{\mathcal{K}}$ und damit liegt die Einschränkung von $k \circ \hat{u}$ auf E , also $k \circ u$, in $\mathcal{K}$.

¹⁾ Dieser Schluß findet sich auch bei V.L.KLEE, jr., Math. Zeitschr., Bd. 69, S. 90-104 (1958) auf Seite 99, worauf mich Herr Dr. H. Bauer freundlicherweise aufmerksam machte.

§ 6

Beweis des Theorems 2 aus Kapitel I
mit maßtheoretischen Hilfsmitteln

Theorem 2: Jeder bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossene, konvexe, der (T)-Bedingung genügende sup-Kegel $\mathcal{U}$ beschränkter, nicht-negativer Funktionen aus $\mathbb{R}^E$ ist γ -stabil.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, daß $\mathcal{U}$ die Punkte von E trennt. Gemäß Lemma 8 existiert ein kompakter Raum $\hat{E}$, in dem E überall dicht liegt und auf den jede Funktion $u \in \mathcal{U}$ auf genau eine Weise fortgesetzt werden kann zu einer auf $\hat{E}$ stetigen Funktion $\hat{u}$. Die Menge $\hat{\mathcal{U}}$ dieser Fortsetzungen $\hat{u}$ ist ein abgeschlossener, konvexer, der (T)-Bedingung genügender sup-Kegel beschränkter, nicht-negativer Funktionen aus $\mathbb{R}^{\hat{E}}$. Daher gibt es zwei Familien $F_1 = (\hat{x}_v, \sigma_v)_{v \in I}$ und $F_2 = (\tau_\mu)_{\mu \in J}$, denen $\hat{\mathcal{U}}$ s-assoziiert ist. Es seien ein $t \in \gamma$ (Kapitel I, § 6, Beispiel 5) und ein $u \in \mathcal{U}$ beliebig vorgegeben. Da t auf $\mathbb{R}^+$ konvex ist, gibt es - man schließt wie im vorigen Paragraphen - zu jedem Punkt $(\hat{u}(\hat{x}_v), t \circ \hat{u}(\hat{x}_v))$ ($v \in I$) eine auf $\mathbb{R}^+$ affin-lineare Funktion s_v mit $s_v \leq t$ und $s_v \circ \hat{u}(\hat{x}_v) = t \circ \hat{u}(\hat{x}_v)$ ($v \in I$). Wegen $t(0) = 0$, wegen der Monotonie und wegen der Konvexität von t ist für jedes $v \in I$ die Funktion s_v von der Gestalt $s_v = \alpha_v i_+ - \beta_v$ mit $\alpha_v, \beta_v \in \mathbb{R}^+$. Da $t \geq 0$ ist, gilt überdies die Beziehung $t \geq \sup(0, \alpha_v i_+ - \beta_v)$ ($v \in I$). Daher ist für alle $v \in I$

$$\int t \circ \hat{u} d\sigma_v \geq \int \sup(0, \alpha_v i_+ - \beta_v) \circ \hat{u} d\sigma_v = \int \sup(0, \alpha_v \hat{u} - \beta_v) d\sigma_v.$$

Da $\hat{\mathcal{U}}$ der (T)-Bedingung genügt und da für jedes $v \in I$ gilt $t \circ \hat{u}(\hat{x}_v) \geq 0$, ist $\int \sup(0, \alpha_v \hat{u} - \beta_v) d\sigma_v \geq \sup(0, \alpha_v \hat{u}(\hat{x}_v) - \beta_v) = t \circ \hat{u}(\hat{x}_v)$. Ferner gilt wegen $t \geq 0$ für alle $\mu \in J$ die Beziehung $\int t \circ \hat{u} d\tau_\mu \geq \int 0 d\tau_\mu = 0$. Also liegt $t \circ \hat{u}$ in $\hat{\mathcal{U}}$ und damit liegt die Restriktion von $t \circ \hat{u}$ auf E , also $t \circ u$, in $\mathcal{U}$.

Bemerkung: Das Theorem 2 kann also unmittelbar nach der Choquet-Denyschen Methode, das heißt, ohne von der in § 3 angegebenen maßtheoretischen Charakterisierung der (T)-Bedingung Gebrauch zu machen, bewiesen werden.

Literatur

- [1] AUMANN, G.: Reelle Funktionen, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1954)
- [2] BAUER, H.: Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte, Archiv der Mathematik, Vol. IX, 389-393 (1958)
- [3] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap.I-II, Actual.Scient.et Ind. 858-1142, Paris (1951)
- [4] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap.III-IV, Actual.Scient.et Ind. 916-1143, Paris (1951)
- [5] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap.IX, Actual.Scient.et Ind. 1045, Paris (1958)
- [6] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. X, Actual.Scient.et Ind. 1048, Paris (1949)
- [7] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques, Chap.I-II, Actual.Scient.et Ind. 1189, Paris (1953)
- [8] BOURBAKI, N.: Intégration, Chap.I-IV, Actual.Scient.et Ind. 1175, Paris (1952)
- [9] CHOQUET, G. - DENY, J.: Ensembles semi-reticulés et ensembles reticulés de fonctions continues, Journal de Mathématique pure et appl., 36, 179-189 (1957)
- [10] HAUPT-AUMANN-PAUC: Differential- und Integralrechnung, Bd. I, Walter de Gruyter u.Co., Berlin (1948)
- [11] KELLEY, J.L.: General Topology, D.van Nostrand Comp., Inc., Toronto-New York-London (1955)
- [12] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume I, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1960)
- [13] LOOMIS, L.H.: An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, D.van Nostrand Comp., Inc., Toronto-New York-London (1953)
- [14] NÖBELING, G.: Grundlagen der analytischen Topologie, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1954)
- [15] NÖBELING, G.-BAUER, H.: Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen, Jahresbericht der DMV, 58, 54-72 (1955)
- [16] RADÓ, T.: Subharmonic Functions, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 5, 1-56 (1937)

Mein Lebenslauf

Am 16. Mai 1933 wurde ich, Georg Siegfried Guber, als erstes Kind des Volksschullehrers Georg Guber und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Katheder, in Nürnberg geboren. Ich habe einen fünf Jahre jüngeren Bruder.

Vom 1. April 1939 bis 15. Juli 1943 besuchte ich die Volksschule in Kammerstein bei Schwabach. Am 5. Juli 1943 bestand ich die Aufnahmeprüfung für die Oberrealschule mit Gymnasium Schwabach, in die ich am 1. September desselben Jahres Übertrat und die ich neun Jahre lang besuchte. Im Juni 1952 legte ich an dieser Schule die Reifeprüfung ab. Am 22. Juli 1952 bestand ich in Fürth die Prüfung für das Stipendium für besonders Begabte.

Im Oktober 1952 zogen wir von Kammerstein, wo meine Eltern seit 1930 gewohnt hatten, nach Penzendorf bei Schwabach um.

Im November 1952 immatrikulierte ich mich an der Universität Erlangen und studierte dort Mathematik und Physik. Im Herbst 1954 unterzog ich mich in diesen Fächern der Vorprüfung. Vom 1. November desselben Jahres bis 31. Mai 1957 war ich beim Mathematischen Institut der Universität Erlangen als wissenschaftliche Hilfskraft tätig; vom 1. Juni 1957 bis 15. Mai 1958 vertrat ich die Hälfte einer Assistentenstelle. Im Herbst 1957 legte ich an der Universität Erlangen das Staatsexamen in Mathematik und Physik ab. Vom 16. Mai bis 30. Juni 1958 hatte ich ein Stipendium der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen.

Meine Lehrer waren in Mathematik die Herren Professoren Dres. O. Haupt, G. Nöbeling, Th. Schneider, W. Specht und H.-J. Kowalsky sowie in Physik und Chemie die Herren Professoren Dres. R. Fleischmann, G. Hesse, A. Meuwesen, E. Mollwo und H. Volz. Ihnen allen fühle ich mich zu herzlichem Dank verpflichtet.

Vom 1. Juli 1958 bis 31. Januar 1961 war ich Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Geometrie der Technischen Hochschule München und seit 1. Februar 1961 bin ich wissenschaftlicher Assistent am selben Institut.

Seit 28. Mai 1960 bin ich verheiratet.

München, 25. April 1961

